НАУКОВІ ПРАЦІ

Теоретична фізика на Закарпатті

Інститут електронної фізики
Національна академія наук України



НАУКОВІ ПРАЦІ

Теоретична фізика на Закарпатті

за матеріалами Міжнародної конференції
(до 100-річчя від дня народження професора Ю.М. Ломсадзе)

SCIENTIFIC WORKS

Theoretical physics in Transcarpathia

According to the materials of the International Conference
(devoted to the Centennial Birthday Anniversary of Prof. Yu.M. Lomsadze)

Ужгород 2024

ББК В 3Г (4Укр – 4Зак), М 58
УДК 539.1

Збірник наукових праць містить матеріали та тези доповідей, представлених на Міжнародній конференції (до 100-річчя від дня народження професора Ю.М. Ломсадзе). Оголошені на конференції доповіді були присвячені найсучаснішим дослідженням у галузі фізики високих енергій, квантової механіки, квантових комп'ютерів, теорії елементарних частинок та радіаційної фізики.

The collection of scientific works contains materials and abstracts of reports presented at the International Conference (for the 100th anniversary of the birth of Professor Yu.M. Lomsadze). The reports announced at the conference were devoted to the most modern research in the field of high-energy physics, quantum mechanics, quantum computers, the theory of elementary particles and radiation physics.

Укладачі
А.М. Завілопуло, д. ф.-м. н.
В.І. Роман, к. ф.-м. н.

Відповідальні за випуск:
Г.М. Гомонай, д. ф.-м. н.,
Т.Ю. Попик, к. ф.-м. н.

Друкується за рішенням Вченої ради Інституту електронної фізики НАН України 11 грудня 2024 року, протокол №11

© ІЕФ НАН України, 2024
© А.М. Завілопуло, В.І. Роман, укладачі, 2024
© В.І. Роман, обкладинка, 2024

ISBN 978-617-8127-47-3

ЗМІСТ

Г. Гомонай
ПЕРЕДМОВА…… **9**
Anna Gomonai
FOREWORD…… **11**
МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ…….. **13**
О. Лендєл
ЮРІЙ МЕЛІТОНОВИЧ ЛОМСАДЗЕ …… **14**
В.М. Симулик
ТРИ НЕЗАБУТНІ ЗУСТРІЧІ З ПРОФЕСОРОМ Ю.М. ЛОМСАДЗЕ,
Есе про Ломсадзе ……..… **25**
J. Jellinek
IN PURSUIT OF FUNDAMENTAL ASPECTS OF PHYSICS…… **40**
О.М. Гаврилик, А.В. Назаренко
ПРО СПЕЦИФІКУ НЕЛІНІЙНИХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ НА ДІЙСНИХ
МНОГОВИДАХ ШТІФЕЛЯ……..… **56**
E.S. Kryachko, E.Yu. Remeta
ON EXISTENCE OF THE PRE-FRAGMENTATION BONDING OF
AMINO ACIDS UNDER IONIZING RADIATION: ALANINE, GLYCINE,
THREONINE, AND VALINE ……...…… **64**
O. Bukalov
BARYON ASYMMETRY: IS THE REALIZATION
OF COSMOLOGICAL ENERGIES AND PROCESSES POSSIBLE
IN LOCAL ASTROPHYSICAL EVENTS?……..… **73**
I. Gapyak, V. Gerasimenko
THE HIERARCHY OF EVOLUTION EQUATIONS FOR
CORRELATIONS OF QUANTUM MANY-PARTICLE SYSTEM……. **79**
О. Лендєл
ВПЛИВ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНОЇ ОБЛАСТІ НА СТРУКТУРУ
ДИФРАКЦІЙНОГО КОНУСУ ПРУЖНОГО ПРОТОН-ПРОТОННОГО
РОЗСІЯННЯ ПРИ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЯХ…….. **88**
A. Nurmagambetov
NEW SOLUTIONS FOR KERR WITH MATTER ……... **98**
Victor Christianto, Florentin Smarandache
THREE NOVEL APPROACHES TO DEEP SPACE / INTERSTELLAR
TRAVEL THAT TRANSCEND THE LIMITATIONS IMPOSED BY THE
ROCKET EQUATION…… **106**
Ю. Ксаверій
ПРОФЕСОР Ю.М. ЛОМСАДЗЕ – ФУНДАТОР
УЖГОРОДСЬКОЇ ШКОЛИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ…… **121**

О.І. Ворошило, О.В. Макаренко
РОЗШИРЕННЯ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ 1-ГО ПОРЯДКУ В ПОЛІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА ПОЛЯРИЗОВАНІ ВІРТУАЛЬНІ ФОТОННІ СТАНИ…… **127**
V.M. Simulik
STEP BY STEP ANALYSIS OF THE N-DIMENSIONAL APPROACH TO THE DIRAC EQUATION…… **132**
З.З. Торич
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ГРУП ДЛЯ ОПИСАННЯ ПРОЦЕСІВ З ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ЧАСТИНКАМИ ПІД КЕРІВНИЦТВОМ ПРОФЕСОРА Ю.М. ЛОМСАДЗЕ …… **142**
T. Obikhod
THEORY AND EXPERIMENT OF GRAVITON PHYSICS…… **147**
І. Качурик, І. Гула
КОГЕРЕНТНІ СТАНИ ОДНОРІДНОЇ ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА…… **151**
Ю. Яремко
РАДІАЦІЙНЕ ГАЛЬМУВАННЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ В ПРОСТОРІ ДЕ СІТТЕРА…… **165**
O. Bukalov
ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE COSMOLOGICAL CONSTANT…… **178**
JEAN-PIERRE MAGNOT
MULTIVALUED PAIRWISE COMPARISONS FROM HIGH ENERGY PHYSICS AND GAUGE THEORY TO DECISION THEORY…… **187**
Valeriy V. Dvoeglazov
NEGATIVE-ENERGY AND TACHYONIC SOLUTIONS IN THE WEINBERG-TUCKER-HAMMER EQUATION FOR SPIN 1 …… **194**

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ…… 208

Y. Elskens, M.K.-H. Kiessling, A.S. Tahvildar-Zadeh
HILBERT'S 6th PROBLEM: THE RELATIVISTIC VERSION …… **209**
Я.І. Грушка
ЗОБРАЖЕННЯ ЕВОЛЮЦІЙНО ВИДИМИХ МІНЛИВИХ МНОЖИН У ВИГЛЯДІ МУЛЬТИОБРАЗУ…… **211**
N.N. Bogolubov (Jr), A.K. Prykarpatski
ON THE ELECTRON SPIN, THE RELATED CLIFFORD ALGEBRA AND DIRAC EQUATION NATURE …… **213**
V.Yu. Denisov
PRODUCTION OF SUPERHEAVY NUCLEI IN HOT-FUSION REACTIONS…… **215**

A. Sen, B.K Parida, K. Jacobs, D. Bondar
INPUT-OUTPUT OPTICS AS A CAUSAL TIME SERIES MAPPING: A GENERATIVE MACHINE LEARNING SOLUTION……. **216**
A.Sen
KOOPMAN-VON-NEUMAN MECHANICS AND GRAVITY ..……..… **217**
А. Антал
МАТРИЦІ ПАУЛІ І КВАНТОВІ ОБЧИСЛЕННЯ …… **218**
H.Ya. Bandura, I.V. Bilynskyi
THE INFLUENCE OF THE ELECTRIC FIELD AND THE POSITION OF THE ACCEPTOR ON THE ENERGY SPECTRUM AND THE INTERSUBBAND OPTICAL ABSORPTION COEFFICIENT IN THE GAAS/ALAS QUANTUM DOT HETEROSTRUCTURE……. **221**
E. Bilokon, V. Bilokon, D.R. Lindberg, A. Sotnikov, D.I. Bondar
DYNAMICS IN THE FEW-FERMION HUBBARD MODEL: RESONANT TUNNELING AND UNDERBARRIER RESONANT TRAPPING……. **223**
Denys Bondar
DECOHERENCE-FREE ENTROPIC GRAVITY: MODEL AND EXPERIMENTAL TESTS…….. **224**
Denys Bondar
ALCHEMY AS AN OPTICAL PROBLEM: THEORY AND EXPERIMENTS **225**
М. Дяченко, О. Новак
СПІН-ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ЕФЕКТИ У ПРОЦЕСІ МАГНІТОГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В СИЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ……..…… **226**
Valeriy V. Dvoeglazov
PROPAGATORS FOR NEGATIVE-ENERGY AND TACHYONIC SOLUTIONS OF RELATIVISTIC EQUATIONS……..……. **228**
С.В. Гедеон, В.Ю. Лазур, А.А. Кочемба
РОЗРАХУНКИ СТРУКТУРИ АТОМА ВАНАДІЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ТЕРМУ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ОРБІТАЛЕЙ…….……..……. **229**
V. Hanulych
MOLECULAR GRAPH THEORY OF PROBLEMS OF RADIATION MODIFICATION OF BIOORGANIC MOLECULES……..…… **232**
М.І. Гайсак
СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРИЧАСТИНКОВИХ ЕКЗОТИЧНИХ МОЛЕКУЛЯРНИХ ІОНІВ З АТОМІВ КИСНЮ, ОБЧИСЛЕНІ В ОДНОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ..... **234**
Ю.В. Горбатенко, О.І. Кривчіков, О.О. Романцова, О.О. Королюк
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА КВАНТОВО-МЕХАНІЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЕПЛОТРАНСПОРТУ НА ПРИКЛАДІ ПРОСТИХ КРИСТАЛІВ І КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ……. **236**

J. Jellinek
"CHROMOSOME TEST" FOR METALLICITY AND UNIVERSALITY IN SIZE-DRIVEN EVOLUTION TOWARDS BULK POLARIZABILITY OF METALS…….……..…….. **238**
І. Качурик, І. Гула
КОГЕРЕНТНІ СТАНИ ОДНОРІДНОЇ ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА…….…. **240**
Mykhaylo Khoma
LONG-RANGE INTERACTION IN HIGHLY EXCITED DIATOMIC SYSTEMS ……..... **242**
А.С. Колісник, Є. В. Петренко, А.В.Терехов, Л. В. Блудова, К. Рогацький, А.Л. Соловйов
ВИВЧЕННЯ ВПЛИВУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕМПЕРАТУРНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ПСЕВДОЩІЛИНИ У ОПТИМАЛЬНО ДОПОВАНИХ ПЛІВКАХ $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ …… **244**
І.В. Козлов, Ю.О. Колесніченко
КВАНТОВІ ЛОКАЛІЗОВАНІ СТАНИ НА МЕЖІ ҐРАТКИ ЛІБА ТА ГЕКСАГОНАЛЬНОЇ ҐРАТКИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ…… **246**
R.A. Kycia
TITLE GEOMETRIC DECOMPOSITION METHOD IN SOLVING EQUATIONS OF PHYSICS AND GEOMETRY EQUATIONS …….. **248**
О. Лендєл
ВПЛИВ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНОЇ ОБЛАСТІ НА СТРУКТУРУ ДИФРАКЦІЙНОГО КОНУСУ ПРУЖНОГО ПРОТОН-ПРОТОННОГО РОЗСІЯННЯ ПРИ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЯХ …….. **249**
В.Т. Маслюк
НОВА КОЛЬОРОВА СТАТИСТИКА НЕАДИТИВНИХ СИСТЕМ……. **251**
Gerard McCaul
QUANTUM DYNAMICAL EMULATION…… **254**
E.B. Ettah, M.E. Ishaje, Kseniia Minakova, Valentyna Sirenko, Ivan Bondar
DFT STUDY OF HALF-METALLIC FULL-HEUSLER ALLOY N_2CaNa: STRUCTURAL, ELECTRONIC, MECHANICAL AND THERMODYNAMIC PROPERTIES……..…… **256**
О. Новак, М. Дяченко, Р. Холодов
САМОПОЛЯРИЗАЦІЯ ШВИДКИХ ЕЛЕКТРОНІВ У СИЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ …… **259**
A.J. Nurmagambetov
NEW SOLUTIONS FOR KERR WITH MATTER……. **262**
T.V. Obikhod
THEORY AND EXPERIMENT OF GRAVITON PHYSICS …… **263**
Oleksandr Bukalov
IS THE REALIZATION OF COSMOLOGICAL ENERGIES AND PROCESSES POSSIBLE IN LOCAL ASTROPHYSICAL EVENTS?……. **265**

R.T. Ovsiannikov, D. Bondar, A.G. Sotnikov
SQUEEZING AND AMPLIFICATION IN OPEN QUANTUM SYSTEMS WITH COLOR CENTERS IN THE LIMIT OF A LARGE NUMBER OF LEVELS IN THE JAYNES-CUMMINGS MODEL **266**

Denys I. Bondar, Zakhar Popovych, Kurt Jacobs, Georgios Korpas, and Jakub Marecek
QUANTUM OPEN SYSTEM IDENTIFICATION FROM TIME-SERIES DATA VIA GLOBAL OPTIMIZATION: OPTIMALLY ACCURATE MARKOVIAN MODELS WITH GENERAL MASTER EQUATION IN KOSSAKOWSKI FORM **268**

В.І. Роман, Л.О. Бандурина, Г.М. Гомонай
ЕЛЕКТРОННЕ ЗБУДЖЕННЯ ТА ІОНІЗАЦІЯ АТОМІВ ВАЖКИХ МЕТАЛІВ **271**

V.V. Sagan, A.I. Krivchikov, V.A. Konstantinov
ANALYSIS OF EXPERIMENTAL TEMPERATURE DEPENDENCES OF THERMAL CONDUCTIVITY OF POLYMERS AND POLYMER COMPOSITES..... **274**

M. K.-H. Kiessling, A. Shadi Tahvildar-Zadeh
DARWIN'S DREAM: PHOTONS AS PARTICLES ON PAR WITH ELECTRONS..... **276**

I.V. Lukin, A.G. Sotnikov, D.I. Bondar
SPECTRAL GAPS OF 2D AND 3D QUANTUM MANY-BODY SYSTEMS IN THERMODYNAMIC LIMIT..... **279**

Harold Steinacker
MATRIX MODELS AS A BASIS FOR QUANTUM SPACE-TIME AND GRAVITY..... **281**

A.V. Terekhov, V.M. Yarovyi, I.V. Zolochevskii, L.O. Ishchenko, and E.V. Khrystenko
UNUSUAL SUPERCONDUCTIVITY IN RARE EARTH BORIDES $Dy_{1-x}Y_x(Rh, Ru)_4B_4$..... **282**

V.M. Yarovyi, A.V. Terekhov, K. Rogacki, A.L. Solovjov
ELECTRICAL RESISTANCE AND MAGNETORESISTANCE IN $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$..... **285**

П.В. Яворський
МЕТОД СКЕЙЛІНГУ В ТЕОРІЇ ДОЗИМЕТРІЇ..... **288**

R.O. Hryniv, T.V. Vasylyshyn, A.V. Zagorodnyuk
APPLICATIONS OF SYMMETRIC AND SUPERSYMMETRIC POLYNOMIALS IN QUANTUM MECHANICS..... **291**

Dmitry V. Zhdanov, Denys I. Bondar
JOINT QUANTUM-CLASSICAL HAMILTON VARIATION PRINCIPLE IN THE PHASE SPACE..... **292**

R.R. Lompay, V.M. Simulik, T.M. Zajac
DARK ENERGY AND DARK MATTER – UNRESOLVED PROBLEMS IN THEORETICAL PHYSICS……. **295**

R.R. Lompay, V.M. Simulik, T.M. Zajac
METAPHYSICS AND THEORETICAL PHYSICS…… **297**

I.V. Bilynskyi, R.Ya. Leshko, M.V. Kvyk
SEMICONDUCTOR HETEROSTRUCTURES WITH TUNNEL-COUPLED QUANTUM DOTS OF DIFFERENT SIZES AND MATERIALS: ENERGY SPECTRA AND WAVE FUNCTIONS……. **300**

I.V. Bilynskyi, R.Ya. Leshko, H.Ya. Bandura, Ya.Yu. Melnyk
INVESTIGATION OF THE ELECTRONIC SPECTRUM OF TETRAHEDRAL-SHAPED NANOCRYSTALS BASED ON SEMICONDUCTOR MATERIALS…….. **301**

Jozef Spałek
RIGOROUS SOLUTION AND ANALYSIS OF HEITLER-LONDON MODEL OF THE CHEMICAL BONDING: TRUE COVALENCY …… **302**

АВТОРСЬКИЙ ПОКАЖЧИК……..……..……..…… 305

ПЕРЕДМОВА

Наукова і науково-педагогічна діяльність Юрія Мелітоновича Ломсадзе з 1955 і до 1979 року нерозривно пов'язана з фізичним факультетом Ужгородського державного (нині – національного) університету та Ужгородським відділом теорії гадронів Інституту теоретичної фізики НАН України. Як висококваліфікований фізик-теоретик він сформувався у 50-х роках минулого століття на фізичному факультеті Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова, де у ті часи працювало яскраве сузір'я вчених (Л.Д. Ландау, М.А. Марков, І.Є. Тамм, М.М. Боголюбов та інші). У 1954 році він захистив кандидатську дисертацію "Про сингулярність електромагнітного потенціалу у вищих наближеннях теорії збурень" під науковим керівництвом академіка М. Маркова, а вже у вересні 1955 року переїжджає до Ужгорода і починає працювати на кафедрі експериментальної та теоретичної фізики Ужгородського державного університету. Саме в Ужгороді йому вдалося реалізувати свій неабиякий талант організатора науки, вченого і педагога. У 1959 році він очолив новостворену кафедру теоретичної фізики на фізичному факультеті Ужгородського університету. Успішна наукова робота співробітників кафедри та досягнуті результати стали підґрунтям для заснування у 1970 році Ужгородського відділу теорії гадронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР, який очолив також Ю.М. Ломсадзе. Задум Ю.М. Ломсадзе відкриття в Ужгороді відділу теорії адронів Інституту теоретичної фізики Академії наук УРСР підтримали такі відомі вчені, як академіки АН СРСР В. О. Фок, М. А. Марков, проф. Д. Д. Іваненко. Особливо варто відзначити сприяння та допомогу професора В. П. Шелеста, який у той час очолював новостворений Інститут теоретичної фізики АН УРСР.

Коло наукових інтересів Юрія Мелітоновича було надзвичайно широким: від фундаментальних питань квантової теорії поля до філософських проблем сучасної фізики. Він умів не тільки оцінити родзинку нової наукової проблеми, але й одночасно сформувати ідею як розв'язати цю проблему. Такий стиль роботи Юрія Мелітоновича сприяв створенню творчої атмосфери в організованих за його активної участі наукових підрозділах, науковий престиж яких і зараз є високим. Під керівництвом професора Ломсадзе були отримані надзвичайно вагомі результати в галузі аксіоматичної теорії поля та елементарних частинок, успішно організавано та проведено в Ужгороді декілька всесоюзних конференцій з експериментальної та теоретичної фізики елементарних частинок, з квантової теорії поля, а також – з філософських та методологічних проблем фізики.

Значення діяльності Ю.М. Ломсадзе визначається не тільки його науковими результатами. Він був блискучим педагогом і багато уваги приділяв вихованню молодих учених. Ця сторона його діяльності призвела до створення першої школи фізиків-теоретиків в Ужгороді, яка стала добре відомою світовій науковій громадськості. Варто зазначити, що серед тих, кого виховала школа Ю.М. Ломсадзе, дванадцять докторів і біля 60 кандидатів фізико-математичних наук, які працюють не тільки в Україні, але й в наукових установах у різних куточках світу.

Міжнародна конференція до 100-річчя професора Ю.М. Ломсадзе присвячена світлій пам'яті видатного вченого, який зробив значний внесок у розвиток вітчизняної та світової науки. Цей науковий форум є не лише символом визнання досягнень Ю.М. Ломсадзе, але й свідченням того, що його наукова спадщина залишається живою і важливою для наступних поколінь науковців. Конференція об'єднала науковців, викладачів та аспірантів для обговорення найсучасніших досягнень у галузі фізики високих енергій, квантової механіки, квантових комп'ютерів, теорії елементарних частинок. У конференції взяли участь не лише провідні українські вчені, а й закордонні фахівці з університетів Європи та США, що підкреслило її міжнародний рівень і актуальність. У рамках заходу було проведено низку дискусій та доповідей, присвячених пам'яті професора Ю.М. Ломсадзе, а також презентацій досліджень, що мають вагоме значення для подальшого розвитку теоретичної фізики.

Голова Програмно-організаційного комітету,
член-кореспондент НАН України
Ганна Гомонай

FOREWORD

Scientific and pedagogical activity of Yuriy Melitonovych Lomsadze since 1955 till 1979 was inseparably related to the Faculty of Physics of Uzhhorod State (now Uzhhorod National) University and Uzhhorod Department of Theory of Hadrons of the Institute of Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine. He grew as a highly qualified theorist in the 1950s at the Faculty of Physics of Lomonosov State University in Moscow which then hosted a bright variety of scientists (L.D. Landau, M.A. Markov, I.Ye. Tamm, M.M. Bogolyubov and others). In 1954 he accomplished his Ph. D. degree "On the singularity of electromagnetic potential in higher approximations of theory of perturbations" supervised by Acad. M. Markov and already in September 1955 року he moves to Uzhhorod and begins his work at the Department of Experimental and Theoretical Physics of Uzhhorod State University. It is in Uzhhorod where he implemented his outstanding talent of scientific manager, scientist and educator. In 1959 he became the head of a new Department of Theoretical Physics at the Faculty of Physics of Uzhhorod State University. Fruitful research work of the staff of the department and their achievements served as the foundation to establish the Uzhhorod Department of Theory of Hadrons of the Institute of Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine in 1970 which was also headed by Yu. M. Lomsadze. Prof. Lomsadze's idea to found the Department of Theory of Hadrons of the Institute of Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine in Uzhhorod was supported by such famous scientists as Acad. V. O. Fok, Acad. M. A. Markov, and Prof. D. D. Ivanenko. One should most notably remember the support and assistance of Prof. V. P. Shelest who then was at the head of the Institute of Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The field of scientific interest of Prof. Lomsadze was extremely wide: from fundamental issues of quantum field theory to philosophic problems of modern physics. He could not only appreciate the zest of a new scientific problem, but simultaneously formulate the idea how this problem should be solved. Such style of work of Prof. Lomsadze was promotive of the creative atmosphere in the scientific teams he organized, the scientific reputation of which is high up to now. Group headed by Prof. Lomsadze obtained significant scientific results in axiomatic theory of field and elementary particles, organized several conferences in Uzhhorod devoted to experimental and theoretical physics of elementary particles, quantum field theory as well as philosophic and methodological problems of physics.

The significance of activity of Prof. Yu.M. Lomsadze is determined not only by his scientific results. He was an excellent educationalist and paid great attention to promoting young scientists. It is his activity that led to the formation of the first school of theoretical physicists in Uzhhorod which became well known in the international

scientific community. One should note that the scientific school founded by Prof. Lomsadze includes twelve doctors of sciences and about 60 Ph.D.'s who work not only in Ukraine, but also in research institutions all over the world.

International conference devoted to the centenary of Prof. Yu.M. Lomsadze is a tribute to the memory of the great scientist who made a noticeable contribution to the Ukrainian and international science. This scientific forum is not only a symbol of acknowledgment of his achievements, but also an evidence of his scientific heritage being vivid and important for further generations of scientists. The conference united researchers, teaching staff and post-graduate students to discuss up-to-date achievements in the field of high energy physics, quantum mechanics, quantum computing, theory of elementary particles. The participants of the conference are not only leading Ukrainian scientists, but also foreign specialists from universities of Europe and the USA, this being an evidence for its international level and importance. The event includes numerous discussions and talks devoted to the memory of Prof. Yu.M. Lomsadze as well as presentations of research results, significant for the further development of theoretical physics.

Anna Gomonai,
Chair of the Programme and Organizing Committee,
Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

О. Лендєл
Інститут електронної фізики НАН України,
вул. Університетська, 21, Ужгород
e-mail: alexanderlengyel39@gmail.com

ЮРІЙ МЕЛІТОНОВИЧ ЛОМСАДЗЕ

14 грудня 2024 року виповнилося б 100 років від дня народження відомого українського вченого, засновника школи теоретичної фізики на Закарпатті, педагога, фундатора наукових досліджень з теоретичної фізики, засновника кафедри теоретичної фізики Ужгородського державного університету та відділу теорії адронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР (згодом відділу теорії елементарних взаємодій Інституту електронної фізики НАН України).

Професор Юрій Мелітонович Ломсадзе народився в місті Баку 14 грудня 1924 року. Починав навчання на фізико-математичному факультеті Азербайджанського державного університету, потім, як відмінник навчання, перевівся на фізичний факультет МДУ. Свою дипломну роботу на тему: “До парної теорії ядерних сил”, виконану під науковим керівництвом академіка М.А. Маркова, він опублікував у 1949 році в ЖЕТФ, одному з найпрестижніших наукових журналів.

Саме під час навчання в аспірантурі у Фізичному інституті ім. П.М. Лебедєва АН СРСР почалося формування висококваліфікованого фізика-теоретика. У травні 1954 року Юрій Мелітонович успішно захистив кандидатську дисертацію на тему “Про сингулярність електромагнітного потенціалу у вищих наближеннях теорії збурень”.



Викладачі, співробітники та студенти кафедри теоретичної фізики фізичного факультету (1965 р.)

Трудова діяльність майбутнього професора починалася з викладання фізики й математики в педінституті. У вересні 1955 року Ю.М. Ломсадзе призначається старшим викладачем на кафедру експериментальної й теоретичної фізики Ужгородського державного університету. У 1966 році Юрій Мелітонович успішно захистив докторську дисертацію на тему: «Аналітичні властивості амплітуди

розсіювання в комплексних g^2- і s−площинах та можливості їх застосування» (в Інституті фізики АН УРСР, м. Київ). В 1968 р. йому присвоєно звання професора.



Професор Ю.М. Ломсадзе, його учень професор Ю. Єллінек (США), сидить п'ятий справа, та викладачі й співробітники факультету (1970-і роки).

Його подальша наукова творчість збігається зі становленням фізичного факультету УжДУ. Це був період бурхливого розвитку світової фізичної науки. З іменем Юрія Мелітоновича Ломсадзе пов’язаний один із найважливіших періодів розвитку й становлення теоретичної фізичної науки на Закарпатті. Видатний фізик-теоретик, яскравий учений і педагог, фундатор наукових досліджень на фізичному факультеті Ужгородського державного університету, він став засновником кафедри теоретичної фізики та відділу теорії адронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР (згодом відділу теорії елементарних взаємодій Інституту електронної фізики НАН України). Згуртовуючи навколо себе здібну студентську молодь, піонери фізичної науки розпочали організацію нових лабораторій, проведення в них занять та наукових досліджень на високому рівні. Задача масового розвитку науки і створення регіональних наукових центрів, як правило, вирішується шляхом широкого розвитку теоретичних досліджень. Реалізація цієї задачі дає можливість при менших затратах істотно розширити географію наукових досліджень і, найголовніше, сприяти підбору й вихованню талановитої молоді. Досвід показав, що людина із ґрунтовними знаннями теоретичної фізики порівняно легко реалізовує себе також і в інших галузях людської діяльності.



Академіки М.М. Боголюбов
та Д.І. Блохінцев − гості Ужгорода

Тематика перших дипломних робіт на факультеті в галузі фізики була спрямована на започаткування в Ужгороді наукових досліджень на рівні тодішніх провідних наукових центрів. Розвиток наукових досліджень на кафедрі, яку очолив Ю.М. Ломсадзе, та в науково-дослідницькій проблемній лабораторії, сприяв різкому підвищенню кваліфікації кадрів теоретичної фізики, а також створенню умов для започаткування академічної науки в Закарпатті. Цей факт був визнаний видатними вченими, які побували впродовж 60-х років у Закарпатті, серед яких академіки М.В. Келдиш, Л.А. Арцимович, Б.Є. Патон, В.О. Фок. На Закарпатті Ю.М. Ломсадзе віднайшов талановиту молодь.

Під його безпосереднім керівництвом та керівництвом його учнів навчались і виростали такі відомі особистості, як випускники УжДУ Володимир Іванович Лендьєл, Вільгельм Ілліч Фущич, Іван Васильович Хіміч, Василь Іванович Сабов, Іван Юрійович Кривський, Омелян Петрович Сабад, Ласло Ласлович Єнковський, Олександр Іванович Лендєл, Сергій Юрійович Медвєдєв, Йосип Михайлович Шуба, Єне Ендрійович Контрош, Володимир Юрійович Лазур, Михайло Іванович Гайсак, Золтан Золтанович Торич, Володимир Іванович Келемен, Володимир Григорович Дробнич, Євген Юрійович Ремета, Володимир Михайлович Симулик, Людмила Олександрівна Бандуріна та багато інших.

Із плином часу більш виразно вимальовується та важлива роль, яку відіграв учений у становленні та розвитку теоретичної фізики на Закарпатті. Випускникам фізичного факультету УжНУ надзвичайно поталанило, що вони мали можливість слухати лекції та приймати участь у роботі систематичних наукових семінарів. Саме на його лекціях та практичних заняттях, навчальних та наукових семінарах формувалися наукові біографії багатьох ужгородських фізиків.



Професори Ю.М. Ломсадзе, В.І. Лендєл, В.І. Сабов та співробітники Відділу теорії адронів О.П. Сабад, В.М. Гулій, Є.Е. Контрош (1975 рік).

Впродовж 25 років наукова й педагогічна діяльність ученого нерозривно пов'язана з фізичним факультетом УжДУ та Інститутом теоретичної фізики НАН України, де Юрій Мелітонович реалізував свій неординарний талант організатора науки, ученого й педагога. Його стиль роботи сприяв створенню незвичайно продуктивної атмосфери в організованих за його участю творчих осередках, науковий престиж яких і зараз є високим. Уже в ранніх наукових працях проявилось глибоке розуміння ним основ квантової механіки й квантової теорії поля, свіжість і оригінальність погляду. Глибокий вплив на подальшу наукову діяльність Юрія Мелітоновича, який, по суті, визначив стиль його роботи, зробили відомі вчені, неординарні особистості – академіки І.Є. Тамм, М.А. Марков, М.М. Боголюбов, В.О. Фок, Ю.М. Березанський, В.Б. Берестецький, Є.М. Ліфшіц. Головний зміст цього стилю полягав у виборі найбільш фундаментальних, ключових проблем теоретичної фізики, створенні адекватних математичних методів дослідження. Коло інтересів Юрія Мелітоновича було надзвичайно широким: від фундаментальних питань квантової теорії поля до філософських проблем сучасної фізики. Будь-яка задача, за яку брався Юрій Мелітонович, завжди відзначалася своєю оригінальністю й викликала жваві дискусії в наукових колах.



Кращі учні професора Ю.М. Ломсадзе: доц. Й.М.Шуба, проф. І.В.Хіміч, проф. І.Ю.Кривський, проф. В.І.Сабо, проф. В.І.Лендьєл, член-кор. НАНУ В.І.Фущич

У вирішенні фундаментальних проблем фізики високих енергій та елементарних часток, що бурно розвивалася в 60-і роки минулого сторіччя, Юрій Мелітонович одним із перших усвідомив великі можливості сучасних методів математичної фізики. Серія його робіт разом з учнями І.Ю. Кривським, О.П. Сабадом і Й.М. Шубою була присвячена найактуальнішим проблемам аксіоматичної квантової теорії поля, зокрема експериментальній верифікації її загальних принципів, в яких втілені наші сучасні уявлення про найбільш фундаментальні властивості матерії, простору і часу. Саме Юрію Мелітоновичу вдалося запропонувати демпінг-функцію з такими аналітичними властивостями, які вже на той час відкрили можливість із належною точністю верифікувати фізичні принципи квантової теорії. Вони показали, що, виходячи із загальних принципів локальної квантової теорії поля, можна одержати асимптотичні співвідношення для повних і диференціальних перерізів, що описують властивості процесів при високих енергіях зіткнення частинок.

Ю.М. Ломсадзе завжди проявляв великий інтерес до методології науки. Його основні наукові праці в цьому напрямку присвячені методологічним проблемам квантової механіки, гносеології, ролі науки в сучасній науково-технічній революції та співвідношенню фундаментальних і прикладних наук. Ці роботи відіграли важливу роль у становленні й виробленні методологічних основ сучасної квантової теорії.

Такий, далеко неповний, підсумок ужгородського періоду наукової діяльності Ю.М. Ломсадзе. Його заслуги в розвитку квантової теорії поля не вичерпуються особистими науковими роботами. У працях численних учнів Юрія Мелітоновича закладено саме його ідеї, стиль наукового мислення, підхід до розв’язання наукових проблем. Головна риса наукового стилю проф. Ю.М. Ломсадзе полягала в умінні оцінити ключовий характер проблеми і одночасно створити адекватний математичний апарат для розв’язання цієї проблеми. Його ставлення до науки відзначалося вибором кардинальних тем для дослідження. Проводячи велику науково-дослідницьку роботу,

Ю.М. Ломсадзе приділяв також значну увагу також і педагогічній діяльності, розв'язанню науково-організаційних питань, підготовці молодих науковців. Серед тих, кого виховала школа Ю.М. Ломсадзе, дванадцять докторів та біля 60 кандидатів фізико-математичних наук. За порівняно малий проміжок часу йому вдалося створити в Ужгороді дієву школу фізиків-теоретиків, яка є невеличкою гілкою могутнього наукового дерева – школи всесвітньо відомого фізика-теоретика, видатного математика, академіка М.М. Боголюбова, тодішнього директора Інституту теоретичної фізики НАН України.

Щоб краще оцінити роль Юрія Мелітоновича, як засновника ужгородської наукової школи, варто нагадати, що навчитися технічним прийомам квантової фізики можна й на відстані за допомогою книг і статей у наукових журналах, але тільки приклад високих людських якостей неординарної й харизматичної особистості може об'єднати молодь у творчий колектив – наукову школу.



Ю.М. Ломсадзе та академік В.О. Фок

Запровадження “боголюбівського теормінімуму” відіграло велику роль у тому, що в 60-70-ті роки послідовники цієї школи зайняли передові рубежі на світовій арені в галузі релятивістської квантової теорії поля і отримали ряд класичних результатів світового рівня. У тодішніх умовах нашого периферійного вузу подоланню бар’єра по запровадженню боголюбівського теормінімуму, як основи для підготовки кваліфікованого сучасного фізика-теоретика, значною мірою сприяла та творча атмосфера, яка панувала в школі учнів проф. Ю.М. Ломсадзе, а також систематичне запрошення відомих вчених країни на кафедру теоретичної фізики УжДУ для читання лекцій та обговорення наукової проблематики. Дякуючи Юрію Мелітоновичу, наш університет став традиційним місцем проведення міжнародних і всесоюзних конференцій та шкіл молодих учених із квантової теорії поля й фізики елементарних частинок. Якщо врахувати, що в роботі цих наукових форумів брали участь такі всесвітньо відомі вчені, як В.О. Фок, Д.Д. Іваненко, А.Б. Мігдал, В.С. Владіміров, Д.В. Ширков, В.Я. Файнберг, Г.В. Єфімов, О.Г. Ситенко, Ю.М. Бережанський та ін., стане зрозуміло, які яскраві і захоплюючі дискусії спалахували на засіданнях цих конференцій.

Слід відмітити Юрія Мелітоновича як великого майстра лекційного слова. Захоплюючі лекції професора із квантової механіки, квантової електродинаміки, квантової теорії поля та ряду спеціальних курсів надовго запам’яталися студентам. Блискучий, емоційний лектор, він умів навіть у викладання традиційних теоретичних курсів внести дух новизни й сучасності. Ним опубліковано понад двісті наукових праць, у тому числі перша в історії закарпатської фізики монографія “Теоретико-груповий вступ у теорію елементарних частинок”. Ця монографія віддзеркалювала тогочасний стан проблеми застосування теоретико-групових методів у теорії елементарних частинок. Наукові статті та часто-густо серії статей публікувалися у провідних фізичних та філософських журналах, препринтах та збірниках – ‘‘Ядерна фізика’’, ‘‘Український фізичний журнал’’, ‘‘ЖЕТФ’’, ‘‘Nuclear Physics’’, ‘‘Nuovo Cimento’’, ‘‘Доповіді Академії наук’’, ‘‘Теоретична та математична фізика’’, ‘‘Ізвестія вузів. Фізика’’, ‘‘Вопроси філософії’’ – та матеріалах багатьох конференцій. Юрій Мелітонович був редактором “Наукових записок УжДУ”, “Доповідей та повідомлень Ужгородського університету”, організатором і першим керівником наукових та філософських семінарів. У них брали активну участь і вчені з інших наукових центрів. Доповідати й витримати дискусію на цих семінарах було великою честю, а зміст доповіді при цьому збагачувався десятками непередбачуваних запитань. Філософські семінари фізичного факультету перетворювалися на справжнє дійство, де в спорах з Юрієм Мелітоновичем найбільш активними опонентами були улюбленці студентів доценти Мотря Василівна Братійчук та Євгенія Леонідівна Жукова. Атмосфера на цих семінарах нагадувала дискусії на засіданнях Британського королівського товариства ще за часів Ньютона. Плодом цих філософських дискусій стало співавторство Юрія Мелітоновича у двох монографіях із питань методології природничих наук. Не тільки семінари, але й сам Юрій Мелітонович став притягуючим центром для молодих фізиків. Ним зроблено чимало й для популяризації фізичної науки та підняття її престижу. Успіхи наукової школи професора Ю.М. Ломсадзе, досягнуті в кінці 60-х років, у тому числі, стали важливою передумовою створення в Ужгороді згодом наукових академічних підрозділів.



За кермом проф. Ю.М. Ломсадзе

Безумовно, постать професора Ю.М. Ломсадзе разом з іншими шестидесятниками визначала інтелектуальний клімат Закарпаття. Не випадково, що Юрія Мелітоновича пов'язувала щира дружба з таким відомим письменником-шестидесятником, як Іван Чендей. Юрій Мелітонович, як справжній грузин, виділявся надзвичайною гостинністю. Його дім на вулиці Гойди в центрі міста завжди був повен гостей, де зазвичай велися бурхливі дискусії на будь-які теми, які хвилювали суспільство. У таких питаннях Юрій Мелітонович завжди проявляв твердість своїх поглядів і не йшов на компроміси, чим завдавав багато клопоту владі. Шкодуємо, що йому не довелося жити у вільній і суверенній Україні.

На кінець 60-х років, тобто впродовж 15-ти років під керівництвом проф. Ю.М. Ломсадзе дійсно була створена представницька школа фізиків-теоретиків, яка стала відомою не лише в колишньому Радянському Союзі, але і далеко за його межами. Цьому сприяла постійно зростаюча кваліфікація проф. Ломсадзе, працелюбність його співробітників і той факт, що він постійно підтримував наукові зв'язки як зі своїми вчителями й колегами, так і з видатними українськими вченими з Києва, Харкова, Донецька, Львова та інших центрів, у тому числі зарубіжних. Про це переконливо свідчить і той факт, що впродовж 10-ти років (з 1958 до 1970) в Ужгороді за його ініціативи було проведено 6 всесоюзних і 2 міжнародні конференції та школи з фізики елементарних частинок. Тому цілком закономірним і обґрунтованим стало відкриття в Ужгороді теоретичного академічного відділу. Для подальшого розвитку теоретичних досліджень на базі наукових кадрів, підготовлених у 1955-70 рр., Ю.М. Ломсадзе у січні 1970 року був відкритий перший в Закарпатті академічний – відділ теорії адронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР. У 1979 р. цей відділ перейшов в Ужгородське відділення Інституту ядерних досліджень АН УРСР, на базі якого в 1992 р. відкрито Інститут електронної фізики НАН України.

З 1979 року проф. Ю.М. Ломсадзе вкотре стає засновником фізичних теоретичних досліджень та першим завідувачем кафедри теоретичної фізики фізичного факультету Північно-Осетинського університету ім. К.Л. Хетагурова в м. Владикавказі (Російська Федерація). Останні шість років життя Юрій Мелітонович – голова секції фізики високих енергій Північно-Кавказького наукового центру вищої школи. На жаль,

важка хвороба не дозволила йому завершити всі творчі задуми: 11 березня 1988 року професора Ю.М. Ломсадзе не стало.

Заслуги в розвитку кращих традицій закарпатської фізичної школи належать порівняно невеликій групі вчених. Серед них прізвища І.П. Запісочного, В.О. Шкоди-Ульянова, Д.В. Чепура і М.В. Братійчук. Професор Ю.М. Ломсадзе, безперечно, перший в цій знаменитій когорті.

Список найбільш відомих публікацій професора Ю.М. Ломсадзе:

1. Кривский И. Ю. О β-взаимодействии электрона с протоном. I / И. Ю. Кривский, Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 2 / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, А. А. Гольдберг [и др.]. – Ужгород, 1958. – С. 31-33. – Текст рос. мовою.
2. Кривский И. Ю. О β-взаимодействии электрона с протоном. II / И. Ю. Кривский, Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 2 / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, А. А. Гольдберг [и др.]. – Ужгород, 1958. – С. 35-37. – Текст рос. мовою.
3. Кривский И. Ю. Об одной возможности обьяснения n-p-рассеяния / И. Ю. Кривский, В. И. Лендьел, Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 2 / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, А. А. Гольдберг [и др.]. – Ужгород, 1958. – С. 11-14. – Текст рос. мовою.
4. Лендьел В. И. Применение модифицированного метода возмущений к n-p-рассеянию на основе PS (PS)-варианта / В. И. Лендьел, Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 2 / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, А. А. Гольдберг [и др.]. – Ужгород, 1958. – С. 7-9. – Текст рос. мовою.
5. Ломсадзе Ю. М. Вопросы l-суммирования ряда метода возмущений / Ю. М. Ломсадзе // Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской Конференции по квантовой теории полей и теории элементарных частиц : (2-6 окт. 1958) / отв. ред. Ю. М. Ломсадзе. – Ужгород, 1958. – С. 40-42. – Текст рос. мовою.
6. Ломсадзе Ю. М. Дисперсионные соотношения для квадрата амплитуды рассеяния / Ю. М. Ломсадзе, В. И. Лендьел, Б. М. Эрнст // Програма и Тезисы докладов II Всесоюзной межвузовской конференции по теории квантованных полей и элементарных частиц : (12-18 мая 1960 г.) / отв. ред. Ю. М. Ломсадзе. – Ужгород, 1960. – С. 51-52. – Текст рос. мовою.
7. Ломсадзе Ю. М. К проблеме нуклон-нуклонных рассеяний при больших энергиях / Ю. М. Ломсадзе, В. И. Лендьел, И. Ю. Кривский. // Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской Конференции по квантовой теории полей и теории элементарных частиц : (2-6 окт. 1958) / отв. ред. Ю. М. Ломсадзе. – Ужгород, 1958. – С. 57-58. – Текст рос. мовою.
8. Ломсадзе Ю. М. О возможности распространения принципа Чу максимальной аналитичности на g2-плоскость / Ю. М. Ломсадзе, С. С. Токарь // Тезисы докладов и сообщения в XVIII ежегодной конференции : сер. физ.-мат. наук : (май 1964) / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, И. П. Запесочный [и др.]. – Ужгород, 1964. – С. 67-72. – Текст рос. мовою.
9. Ломсадзе Ю. М. О возможности теории квантованных функционалов / Ю. М. Ломсадзе // Програма и Тезисы докладов II Всесоюзной межвузовской

конференции по теории квантованных полей и элементарных частиц : (12-18 мая 1960 г.) / отв. ред. Ю. М. Ломсадзе. – Ужгород, 1960. – С. 19-20. – Текст рос. мовою.
10. Ломсадзе Ю. М. О возможных вариантах теории β-распада / Ю. М. Ломсадзе // Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской Конференции по квантовой теории полей и теории элементарных частиц : (2-6 окт. 1958) / отв. ред. Ю. М. Ломсадзе. – Ужгород, 1958. – С. 23-24. – Текст рос. мовою.
11. Ломсадзе Ю. М. О новом методе решения уравнений движения в квантовой теории полей / Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 1 / редкол. : Б. Н. Дашкевич, Ю. М. Ломсадзе, А. М. Куришко [и др.]. – Ужгород, 1957. – С. 23-25. – Текст рос. мовою.
12. Ломсадзе Ю. М. О новом подходе к проблеме построения теории нелокализуемых полей / Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 1 / редкол. : Б. Н. Дашкевич, Ю. М. Ломсадзе, А. М. Куришко [и др.]. – Ужгород, 1957. – С. 3-5. – Текст рос. мовою.
13. Ломсадзе Ю. М. О сингулярности потенциала в парных теориях / Ю. М. Ломсадзе // Научные записки : химия, физика, метематика / редкол. : Б. Н. Дашкевич, С. Д. Берман, Ю. М. Ломсадзе [и др.]. – Т. XVIII. – Л., 1957. – С. 101-106. – Текст рос. мовою.
14. Ломсадзе Ю. М. Об одной возможности трактовки элементарных частиц как связанных состояний / Ю. М. Ломсадзе // Доклады и сообщения : сер. физ.-мат. и хим. – № 2 / редкол. : Ю. М. Ломсадзе, С. Д. Берман, А. А. Гольдберг [и др.]. – Ужгород, 1958. – С. 4-6. – Текст рос. мовою.
15. Ломсадзе Ю.М. О поведении полных сечений πр- рассеяния при больших энергиях/ Ю.М.Ломсадзе, В.И.Лендьел, Б.М. Эрнст / ЖЭТФ, т. 39, вып. 4(10) (1960).
16. Ломсадзе Ю.М. На яких віддалях і протягом якого часу відбувається взаємодія при високих енергіях? А.І.Лендел, Ю.М.Ломсадзе, С.С. Токар, В.В.Чижиков. Укр. фіз. журнал. Т. 14, стор. 1519-1524 (1969).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1]. Лендєл О.І., Келеман В.І. ЮРІЙ МЕЛІТОНОВИЧ ЛОМСАДЗЕ (100-річчя від дня народження професора, засновника школи теоретичної фізики на Закарпатті (1924–1988). Календар краєзнавчих пам'ятних дат Закарпаття на 2024 рік . Вид.: ТОВ «РІК-У» ISBN 978-617-8276-82-9. С. 319-328.
[2]. Лазур Володимир. Професор Ломсадзе Юрій Мелітонович : / В. Лазур, Михайло Гайсак // 20 років Інституту електронної фізики Національної академії наук України (1992–2012) / уклад. А. М. Завілопуло. – Ужгород : ФОП Бреза А. Е., 2012. – С. 14-19.
[3]. Лазур Володимир. Юрій Ломсадзе / В. Лазур // Педагоги-науковці. Ч. 2 / упоряд., передм. В. В. Туряниці. – Ужгород, 2000. – С. 70-75.
[4]. Лазур Володимир. Юрій Мелітонович Ломсадзе : (1924–1988) : засн. від. теорії адронів ІТФ АН УРСР
[5]. Ломсадзе Юрій Мелітонович // Шманько І. І. Нариси з історії фізики з елементами краєзнавства / І. І. Шманько, Л. І. Золотун. – Ужгород : Мистец. лінія, 2002. – С. 84-86.

[6]. Химинець Василь. Юрій Мелітонович Ломсадзе / В. Химинець, І. Шманько // Химинець, В. Фізика на Закарпатті / В. Химинець, Ілля Шманько. – Ужгород : Карпати, 2012. – С. 270-271.

O. Lengyel
Institute of Electron Physics of NAS of Ukraine,
Universytetska street 21, Uzhhorod
e-mail: alexanderlengyel39@gmail.com

YURIY MELITONOVYCH LOMSADZE

December 14, 2024 will be the Centennial Birthday Anniversary of Professor Yuriy Melitonovych Lomsadze – a famous Ukrainian scientist, a leading specialist in the field of theoretical physics, the founder of the school of theoretical physics in Transcarpathia, head of the Department of Theoretical Physics of Uzhgorod State University and the Uzhgorod Theory of Hadrons Department of the Institute of Theoretical Physics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, which became part of the Institute of Electronic Physics NAS of Ukraine as a Department of the Theory of Elementary Interactions.

В.М. Симулик
Інститут електронної фізики НАН України,
вул. Університетська, 21, 88017, Ужгород
e-mail: vsimulik@gmail.com

ТРИ НЕЗАБУТНІ ЗУСТРІЧІ З ПРОФЕСОРОМ Ю.М. ЛОМСАДЗЕ

Есе про Ломсадзе

Спогади автора про три незабутні зустрічі з професором Юрієм Мелітоновичем Ломсадзе, написані у стилі есе. Думки автора про роль Ю.М. Ломсадзе у розвитку теоретичної фізики в Ужгороді і про його внесок у світову науку. Коментарі про професора Ломсадзе як про людину, і про долю вченого загалом. Описано вплив спілкування з Ю.М. Ломсадзе на долю автора.
Ключові слова: історія фізики, аксіоматична квантова теорія поля, квантова електродинаміка, квантова механіка, парадокс Енштейна – Подольського – Розена, редукція хвильової функції.

Вирішив матеріал до 100-річчя з дня народження професора Ломсадзе написати у вигляді есе. Чому? Нудні тексти з переліком заслуг напишуть і без мене. А яка то була людина? Масштаби її мислення. Потрібно розповісти наступним поколінням. А щоб привернути увагу молоді, її потрібно зацікавити. Так навчав нас професор Ломсадзе.

Символічно, що Юрій Мелітонович Ломсадзе народився наприкінці 1924-го року, а вже наступного 1925 року була опублікована стаття Вернера Гейзенберга, з якою пов’язують народження квантової механіки як спеціального розділу теоретичної фізики. Таким чином, початок наукової діяльності Ю.М. Ломсадзе співпав з епохою становлення квантової теорії, а подальша доля вченого переплелася з епохою її всебічного розвитку.

Кілька разів замислювався, з чого розпочати. Про себе, як і чому я з ним тричі зустрічався – однозначно, що ні!

Про нього – цілком можливо, але під запитанням, чи буде це правильним підходом? А чи не можна якось краще?

Вірна думка пришла тільки що. Початок повинен бути про Епоху Ломсадзе, про Епоху творців і першопрохідців, про людей, на плечах яких стоїть фундамент сучасної науки у невеликому містечку Ужгород, і, зрозуміло, що практично усюди у світі, у всіх наукових центрах, наука розпочиналась так само – з беззаперечних лідерів і особистостей, які її започаткували. Неодноразово бачив і відчував це власним спинним мозком у багатьох відомих міжнародних осередках фізики та математики, куди закидала доля фізика-теоретика.

До створення нашого Інституту електронної фізики НАН України мали безпосереднє відношення чотири постаті. Професори Володимир Олександрович

Шкода-Ульянов та Юрій Мелітонович Ломсадзе практично одночасно створили перші академічні підрозділи Академії наук України на Закарпатті – відділ фотоядерних процесів Інституту фізики та відділ теорії адронів Інституту теоретичної фізики. Дещо пізніше професор Михайло Іванович Головей відкриває спеціалізовану галузеву лабораторію №24 Всесоюзного науково-дослідного інституту монокристалів. Об'єднавши ці академічні підрозділи і відкривши додатково відділи електронних та іонних процесів, професор Іван Прохорович Запісочний започаткував Ужгородське відділення Інституту ядерних досліджень НАН України, яке у 1991 році очіковано переростає у самостійний академічний інститут.

В Ужгородському Державному університеті тих часів на власному досвіді, без істориків та їх довідників, можу виділити три подібні постаті – професора Дмитра Венедиктовича Чепура, а також Михайла Олександовича Бізілю та Михайла Васильовича Симулика. Про Д.В. Чепура написано достатньо і без мене, а про двох інших нагадаю. Лікар лікарів (це коли у лікаря лікуються і самі лікарі, а не лише пацієнти) М.О. Бізіля створив на Закарпатті нейрохірургію не оминувши яскравою діяльністю і УжДУ, а мій батько, М.В. Симулик, створив кафедру угорської філології, а потім і цілий факультет романо-германської філології (сьогодні факультет іноземних мов), які наразі процвітають і процвітатимуть, допоки існує в Ужгороді університет! На жаль інша доля спіткала створений Ю.М. Ломсадзе відділ теорії адронів. Про причини, можливо, ще колись напишу, а для людей-ферміонів, текстом, який люди-бозони ніколи не зрозуміють – вже розпочав писати для поміжрядкового читання.

Юрій Мелітонович Ломсадзе був яскравим представником Епохи творців і першопрохідців, коли наука бурхливо розвивалась, вивчались найнедоступніші куточки нашої планети, людство робило перші кроки у космосі і на Місяці. На всій планеті ця епоха поступово змінювалась на епоху споживачів, особливо у нашому регіоні, де окрім усього іншого змінилася сама держава. Ми 70 років рухались у одному напрямку, аж раптом взялися не менш ніж 70 років рухатись у напрямку протилежному? Наступила зовсім інша ера. Ера зовсім інакших людей і особистостей.

Про мого батька згадую не випадково, адже саме він познайомив мене з професором Юрієм Мелітоновичем Ломсадзе. Батько з Ломсадзе друзями не були, але були добрими знайомими, бо таких як вони в ужгородському університететі була мізерна кількість і вони, хоча і були людьми-ферміонами, а не бозонами, глибоко корелювали між собою. Вже тоді владу у науці спочатку непомітно, а потім нищівним потоком бізонів/бозонів почала захоплювати лавина зовсім інших людей – не творців науки, а проїдачів створеного іншими. Такі люди все частіше не просто займали посади, а також збирали не лише академічні звання, але і колекціонували ордени та високі державні нагороди. А взамін лише нагло проїдали все створене задовго до них іншими. Нова епоха, епоха паразитів і потребителів брала своє. Людям типу Ломсадзе ставало все тісніше, потім їм зовсім не стало місця. Архіви частково відкривають через 50 років. Тоді дещо починають розуміти історики. Ну а фізик-теоретик повинен знати

все, бо інакше неможливо займатися теоретичною фізикою. Саме так нас навчав професор Ломсадзе.

Про професора Ломсадзе я почув ще будучи підлітком. Допитливі школярі з Ужгородської СШ №1 (розташована у центрі міста), де англійська мова вивчалася з першого класу, гасали навколо школи і помітили на будинку поряд з пам'ятником Леніну незрозумілий напис на англійській мові – Theory of Hadrons Department. Ми запитали і вчителя фізики, і вчителя англійської мови, але задовільної відповіді не отримали. Дещо більше пояснили нам батьки вдома – так я вперше дізнався про професора Ломсадзе і про створений ним науковий підрозділ, який не відносився до ужгородського університету, що тоді був для школярів мірилом науки. Але справжнє значення слова «адрони» стало зрозумілим лише значно пізніше, коли я навчався на фізичному факультеті. На третьому курсі стало зрозумілим і призначення та відомче підпорядкування відділу теорії адронів.

І тоді, і сьогодні, колишні студенти з вдячністю пригадували і пригадують захоплюючі лекції професора Ломсадзе по квантовій механіці. Навіть ті, що не обрали теоретичну фізику своєю спеціалізацією, розповідають, що завдяки Юрію Мелітоновичу пам'ятають основні положення цієї теорії і володіють ними на порядок краще за тих наших колег, яким цей курс читали інші викладачі. Студенти у всьому світі таких викладачів як Ломсадзе називають Вчитель, з повагою і з великої букви! Коли часто чую про сьогоденних викладачів в університетах та школах мого рідного Закарпаття справедливі судження «Учителиці та учительохи», то соромно стає навіть за себе, бо все життя займаюся наукою, а по дотичній і освітою, а ситуацію на краще лише мізерно і явно недостатньо змінив.

Мабуть найбільша заслуга Ю.М. Ломсадзе полягає у тому, що він залишив після себе кілька десятків висококваліфікованих учнів. Ці люди у свою чергу підготували своїх учнів, почалася свого роду ланцюгова реакція. Таким чином, зараз можемо констатувати існування наступного покоління учнів Ломсадзе. До нього належу і я – учень професора Івана Юрійовича Кривського, який був безпосереднім учнем професора Ломсадзе.

Перша незабутня зустріч з професором Ю.М. Ломсадзе відбулася у мене на третьому курсі, коли я обирав спеціалізацію і кафедру для подальшого навчання. Щоб пояснити, краще трохи повернутися до першопричин.

Якось батько разом із своїми студентами-філологами привів мене, десятирічного школяра, на екскурсію у лабораторію космічних досліджень Ужгородського університету. Там лідер ужгородських астрофізиків Матрьона Василівна Братійчук з посмішкою та притаманною їй доброзичливістю дала мені роздивитися у телескоп Сатурн, Юпітер, з вишорерними у ряд галілеєвськими супутниками, та Місяць. Мій батько багато разів пожалкував про це, бо потім у школі я займався у гуртках математики, фізики та астрономії, і чути не хотів про його філологію.

Вже з першого курсу я був головою астрономічного гуртка студентів, але чим більше дізнавався про тематику досліджень ужгородських астрофізиків, тим більше

мене охоплювало розчарування і апатія. В Ужгороді тоді займалися виключно астрометрією і, особливо, спостереженнями за штучними супутниками Землі, закономірностями у зміні їх блиску. Школярем-старшокласником, завдяки другові батька з Хустської гімназії та їх студентському Будапешту, який мешкав у Москві на Хорошеєвському шосе, побував у московському планетарії. Тому особливо мене розчарував телескоп, який у Ужгородських астрономів був навіть слабшим, ніж у Москві, у планетарії. Мене вже у середній школі зацікавили зовсім інші розділи астрономії, а саме, космогонія та космологія, особливо проблема дослідження будови та походження Всесвіту. Вже тоді була якась незрозуміла чуйка, внутрішні сигнали, що саме цим буду займатися до кінця життя. Матрьона Василівна дозволяла зробити дипломну роботу по цим питанням, але я розумів, що писатиму її самостійно, фактично без керівництва, і наукового значення та перспектив робота не матиме.

Тож батько домовився про мою консультацію у професора Ломсадзе, але спочатку три дні востаннє переконував мене перевестися до нього на філологічний факультет. Я не був здоровим у той час, а така можливість таки існувала при умові здати додатково кілька екзаменів. Я якось ясно уявив ставлення до мене студентів-філологів у такому випадку. На фізичному факультеті у різні часи часто навчалися діти викладачів, принци, маркізи, спадкоємці, як ми їх поза очі називали. Відношення критичної маси студентів до таких нащадків викладачів мені було добре відоме. Отже я черговий раз категорично відмовився. Так відбулася моя перша незабутня зустріч з професором Ломсадзе. Незабутня, тому що вплинула на мою подальшу долю. Відтоді я назавжди обрав фах фізика-теоретика.

Отже я вперше потрапив у приміщення відділу теорії адронів, де потім довелося певний час працювати. Юрій Мелітонович детально розпитав про причини моєї появи і чим він може зарадити (не буду повторюватися – вище я вже про все розповів). Потім запропонував написати якісь математичні твердження на дошці для підтвердження моєї розповіді. Я серйозно потребував консультації, бо завжди надіявся на себе, а не на батьків. Тому я готувався на тому рівні, який тоді мені був під силу [1, 2], і передбачив, що писати математичні твердження на дошці прийдеться. Отже без папірця розписав на дошці, те що зрозумів з висновку Шварцшільда про існування чорних дір простору і часу. Професору у цілому сподобалось. Він назвав мене «юноша» без зневаги у тоні і продовжував так звертатися до мене до кінця цієї зустрічі. До речі, розв’язок Шварцшільда я тоді доповідав і вперше, і в останнє.

Зрозуміло, що професор по черзі попросив пояснити усі значки, усі математичні символи, які були на дошці. Я десь на четвірку справився з цим, хоча спершу злякався. Професор був задоволений. Скільки разів після цього мене просили пояснити усі вживані позначення під час моїх доленосних виступів на семінарах! Пройшло лише п’ять років і про це саме мене запитували по черзі Вілен Митрофанович Струтинський, Олександр Ілліч Ахієзер, Сергій Володимирович Пелетмінський, Дмитро Васильович Волков, потім у добрій половині усіх відомих центрах Москви, потім, після розпаду СРСР, у понад десятьох країнах Європи…. Це мене потім завжди веселило і

підбадьорювало, бо Юрій Мелітонович, відразу, міцно і назавжди, підготував мене до очікування таких запитань.

Сьогодні я розумію, що мені дещо пощастило з моїм виступом перед Ломсадзе, зокрема, з таким вибором теми, бо Юрій Мелітонович загальною теорією відносності ніколи не займався. Тепер я знаю точно, що цей підхід до гравітації він не любив – неначе передбачав з притаманною йому передбачливістю, що колись ця теорія буде банкротувати перед глибинами Всесвіту, як у епоху Гільберта – Ейнштейна [1, 2] банкротувала перед таємницями Сонячної системи ньютонівська гравітація. Як Юрій Мелітонович відносився до інших потужних підходів до теорії гравітації я не знаю, хоча під час третьої зустрічі з ним мав можливість розпитати про це, але, на жаль, розпитав лише частково. Дуже шкодую за втраченою можливістю.

Ну а тоді він розжував мені, що «юноша» повинен обрати кафедру теоретичної фізики, хоча там гравітацією не займаються. Або переводитися до Москви і втрачати здоров'я, якого завжди скінчена кількість. Але і у Москві він радив займатися теоретичною фізикою, а не астрофізикою. Добре пам'ятаю чому. Для того, щоб пояснювати будову та походження Всесвіту «юноша» повинен знати як «Отче наш» квантову механіку, квантову теорію поля, теорію груп та алгебр, усі курси теоретичної фізики, які читають на фізичному факультеті, усі спецкурси кафедри теоретичної фізики. Справжнє розуміння будови та походження Всесвіту прийде саме, незалежно від волі та бажання «юноші», або не прийде ніколи, якщо «юноша» його не послухає.

Остаточний цвях у тендітну будівлю ужгородської астрофізики, яка ще залишалась у моїй свідомості, він заклепав спонтанно, під впливом нашого спілкування, видавши незабутній каламбур про чорні діри, Матрьону Василівну та «юношів», які цікавляться не тими чорними дірами. Я його добре пам'ятаю, але…

У цьому есе я розповідаю правду і тільки правду. Але користуючись відомою логічною лазейкою у юриспруденції багатьох провідних країн світу не говорю усю правду! Тож дослівний каламбур залишаю на розгадку людям-ферміонам, а іншим можу повідомити «усю правду» лише у глибоких кулуарах конференції і не просто за русинське «нараз дякуву». Дуже поважаю і Юрія Мелітоновича і Матрьону Василівну, бо є за що, а людям-бозонам раджу подивитися на себе у дзеркало – лишній раз не зашкодить.

Перша зустріч з професором Ломсадзе закінчилась тим, що він дав мені усі координати Івана Юрійовича Кривського і порекомендував написати під його керівництвом курсову роботу. Так я потрапив до учнів І.Ю. Кривського, з яким потім написав у співавторстві понад 180 публікацій, причому переважна більшість – статті та багатосторінкові препринти, а не тези доповідей, є також одна монографія.

Чому Юрій Мелітонович не взяв мене в учні до себе, я не знаю. По перше, такі люди як професор Ломсадзе часто відчувають свою долю. Можливо він відчував, що залишається в Ужгороді не надовго. З іншого боку, у ті часи його увага була повністю захоплена аксіоматичним підходом до квантової теорії поля, ну а «юноша», третьокурсник ужгородського університету, жодним чином не був до цього

підготовленим. Тож професор поступив зі мною дуже правильно, бо Іван Юрійович Кривський мав низку спільних статей по симетрії рівнянь математичної фізики у співавторстві з відомим українським вченим Вільгельмом Іллічем Фущичем. Така тематика була значно доступніша для розуміння студентом і швидко доводила студентів до рівня самостійності і власноруч отриманих наукових результатів. Як наслідок, студент незадовго здобував дуже психологічно важливу впевненість у своїх силах – залишалось лише не отримати, як тупий футболіст, «зірковість». Невипадково учнями В.І. Фущича вважають себе понад 50 кандидатів наук. Тож за моє поступове і поетапне залучення до аксіоматичного підходу і глибин теоретичної фізики я професору Ломсадзе щиро вдячний.

Друга зустріч відбулася десь через півроку. Я зайшов черговий раз у відділ теорії адронів до Івана Юрійовича Кривського. Секретарка Ломсадзе – доброзичлива і незабутня Світлана Серединська – притулилась вухом до дверей кабінету і повідомила, що там пишуть статтю і дуже сперечаються шеф Ломсадзе, Іван Юрійович та Йосип Михайлович Шуба. Я причинив двері і подав знак Івану Юрійовичу, що я прийшов (бо перед цим, по-студентськи, прогуляв назначену зустріч).

Несподівано Юрій Мелітонович запросив мене увійти. «А юноша, войдите, вам будет полезно поприсутствовать», – сказав він. Їхнє сумісне написання статті [3] або [4], на цей момент полягало у нескінченій дискусії. Запам’яталось надовго, що всі вони брали у дискусії однакову рівноцінну участь, кожен неодноразово підходив до дошки і щось писав з теорії операторів у гільбертовому просторі. Керівна роль Ломсадзе практично не відчувалася. Особистий внесок кожного, на мій студентський погляд, був приблизно однаковим. «Вот так, юноша, рождаются совместные идеи» – приблизно так професор прокоментував для мене ситуацію, коли десь через годину все це нарешті закінчилося.

Саме у такому стилі ми «народжували» потім з І.Ю. Кривським наші сумісні публікації.

Десь через десять років я був випадково присутнім у Інституті теоретичної фізики у Києві у кабінеті мого друга, відомого професора, при обговоренні наступної статті трьома зовсім іншими вченими, які також вже мали на той момент попередні сумісні роботи. Я хотів піти у бібліотеку, але мій друг попросив мене зачекати, мовляв це буде не надовго. Мій друг і молодий чоловік, молодший за мене, активно обговорювали результат і кілька разів заповнювали дошку формулами. Щось мізерне, неконкретне, на майбутнє, підказав їм і я. Третій сидів за журнальним столиком і пив каву. З початку і до самого кінця він не обмовився жодним словом. Складалося враження, що або він нічого не розуміє, або зневажає рівень дискусії. Позначимо його, умовно, як XYZ.

Я тоді регулярно приїздив до Києва, була можливість, були корисні конференції. Наступного разу мій друг зустрів мене страшенно роздратований. «Уявляєш, XYZ претендує на співавторство», – нарешті вичавив із себе він. «Сподіваюся, ти послав його далеко?» – запитав я. «Та звичайно послав, але ніяк заспокоїтися не можу, пішли

звідси», – відповів друг одягаючись. Вже по дорозі я ненав'язливо запитав: «Ну а чим же він мотивував?» «Він був присутнім при дискусії!» – відповів друг.

Я часто пригадую другу зустріч з Ю.М. Ломсадзе і те, як він працював зі своїми співавторами. У житті траплялись всілякі ситуації у питаннях співавторства. Я вище пригадав ці два діаметрально протилежні випадки не випадково. Надіюсь, таким чином, я пояснив, чому міцно пам'ятаю другу зустріч з професором Ломсадзе.

Третя зустріч відбулася вже після захисту мною кандидатської дисертації. Ми нарешті поспілкувались довго, десь півдоби. Саме ця остання зустріч дозволяє писати спогади про Ломсадзе, дає надію, що я трохи зрозумів цю людину з великої букви, пізнав її ближче. І маю право розповісти про свої враження.

В ті часи довелося їздити по різним науковим центрам, виступати з семінарами, шукати додаткове фінансування. Я був постійно готовим писати на дошку формули. Як правило, виступав у Москві та по її околицям, але тоді в черговий раз опинився у Києві, в Інституті теоретичної фізики.

Був здивований, коли мене викликали з конференц-залу і попросили по закінченні доповіді зайти до секретарки директора. Там мене чекала розповідь симпатичної секретарки про дзвінок із Ужгорода якогось невідомого їй Івана Юрійовича Кривського з проханням знайти мене (тоді не було навіть у науковій фантастиці ні мобільних телефонів, ні Інтернету), щоб я знайшов у Інституті математики на іншій конференції, у академіка Березанського, професора Ломсадзе і розповів йому докторську дисертацію Кривського. Іван Юрійович наскільки точним був у наукових твердженнях, настільки не точним у науково-організаційних. Тож я вже давно звик до його завдань типу «піди туди, не знаю куди, принеси то, не знаю що». Я вирішив спробувати допомогти. Справа у тому, що Ю.М. Ломсадзе у ті часи працював у Північній Осетії, тож у разі мого успіху, це економило Кривському кілька тижнів життя. А мені гарантувало, як мінімум, двотижневий похід з друзями по нетрям Карпат зі щирого дозволу начальника. Так, як колись було у Кривського і Ломсадзе, Іван Юрійович працював і зі мною. Принцип був – «кончил дело – гуляй смело», а поки висіла незавершена робота, то не було ні аспірантських канікул, ні відпусток.

В Інституті математики з дошки оголошень відразу дізнався, що конференція закінчилася два дні тому назад, але методом доктора Ватсона знайшов аспірантку, що відповідала за поселення – вона пригадала, що Ломсадзе був поселений у готелі «Україна». Кривському дуже повезло, готель «Україна» був поруч, бо якби довелося, наприклад, повертатися знову у Феофанію, або ще десь їхати у кінець Києва, то я б застосував дедуктивний метод Шерлока Холмса і поїхав до дівчат. А так я без особливої надії зайшов по дорозі до готелю «Україна».

Виявилося, що Ю.М. Ломсадзе все ще мешкає у номері суперлюкс. Я постукав. Двері відчинив високий молодик приємної зовнішності і повідомив, що професор відсутній. Але почувши, що я з Ужгорода, щиро запросив мене увійти. «Юрій Мелітонович часто згадує Ужгород» – повідомив він. На екрані телевізора був надпис

«Динамо Тбілісі – Динамо Київ» а на журнальному столику стояв чималенький кубок червоного грузинського вина.

Юрій Мелітонович був на прогулянці не сам і повернувся через дві години. Я не дуже посварився за цей час з молодим чоловіком, який виявився аспірантом Ломсадзе і водночас сином відомої у Північній Осетії людини. Якщо не враховувати футбол, то спілкування виявилося надзвичайно приємним і пізнавальним, я багато дізнався про Північну Осетію.

Юрій Мелітонович мене впізнав і був мені щиро радий. Він сказав, що чув про мої виступи у Москві від своїх друзів і більше «юношею» не називав. Аспіранта він попросив уважно слухати, а людину, що з ним прийшла, відправив у іншу кімнату і попросив зачекати. До доповіді мені не потрібно було готуватися, бо дисертація Кривського [5] складалася з розвитку аксіоматичного підходу Вайтмана (по роботах, написаних у співавторстві з Ю.М. Ломсадзе), моєї кандидатської [6] і змички між цими різними частинами (див. також [7]). Я хитро розпочав з повідомлення суті і змісту. Професор відразу зауважив, що першу частину він знає краще за Кривського і щоб я не витрачав час. Свою частину [6] я міг ще раз захистити де завгодно і коли завгодно, а змичка полягала у аксіоматичному рівні викладення моєї частини. Запитання були по ходу, дуже влучні і, як ми кажемо, в торець. Тож увесь хміль з мене вилетів. Доповідь була успішною і Юрій Мелітонович, як резюме, повідомив, що Кривський може надсилати кінцевий проект відгуку, він підпише і відправить у Мінськ у Спецраду по захисту.

Коли зі справами було закінчено, то Юрій Мелітонович довго розпитував про Ужгород, спочатку про спільних знайомих, потім про своїх знайомих, про шахмати і преферанс. Відчувалася його величезна ностальгія по часах, проведених в Ужгороді. Я чим міг допомагав йому інформацією.

Потім він закликав людину з сусідньої кімнати і ми вже усі четверо розмовляли про що завгодно, ми з Юрієм Мелітоновичем часто повертались до теоретичної фізики. Потім Юрій Мелітонович дав команду аспіранту і вони почали збиратися в дорогу. Я здивувався, бо до вильоту їх літака було аж сім годин. Все стало зрозумілим, коли професор повідомив, що хоче йти до аеропорту пішки.

Так ми і йшли, спочатку вечірнім, а потім нічним Києвом, прямуючи до летовища. Була чудова погода. Попереду ми з Юрієм Мелітоновичем, позаду аспірант і знайома професору людина. З нашої нескінченої бесіди про науку запам’яталася настанова професора, яку він вже казав мені під час короткої першої зустрічі: «Ніколи не зв’язуйтесь з гравітацією!»

Останнім часом я порушив дружній заповіт професора. Загадка темної матерії та темної енергії Всесвіту заставила мене зробити перші, початкові кроки, у цьому напрямку [8–11], принаймні щодо елементарних частинок зі спіном 2. Якби я тоді знав, що це буде остання зустріч, то розмова була б про інші більш фундаментальні речі. Зараз навколо мене все таки є кілька дуже освічених і талановитих молодих людей, але як би було здорово подискутувати з професором Ломсадзе...

Окрім величезного позитиву на той момент, сьогодні ця зустріч згадується також і з іншого боку – як зустріч втрачених можливостей. Я так і не вияснив тоді його відношення до шостої проблеми Гільберта [12]. Ні він, ні його учні ніколи не вживали цей термін у зв'язку з аксіоматичними підходами до квантової теорії поля, які вони розвивали. Було б цікаво знати, чому? А на той момент я сам цим не дуже цікавився. Зацікавлення проблемами Гільберта прийшло до мене значно пізніше, коли зіткнувся з математичними обмеженнями функціонування штучного інтелекту (маю на увазі праці Шаєма Бен Девіда та Курта Геделя). До речі, теореми Геделя з професором Ломсадзе ми все таки трохи обговорили.

Ми трохи зачіпали тоді парадокси квантової механіки, які він знав пояснювати досконало, але як же я не розпитав його детально про парадокс Ейнштейна–Подольського–Розена?

Моя розповідь про професора була б неповною без ще **двох епізодів**. **Перший** – це довга дискусія про Ломсадзе з Дмитром Яковичем Петриною. Він тоді був член-кором НАН України, а, можливо, вже навіть академіком.

Він підсів до мене у автобус рейсу №63 біля Інституту теоретичної фізики і сказав, що я непогано виступив на конференції і маю шанс не бути таким провінційним вченим як В.І. Фущич та Ю.М. Ломсадзе. Я дуже обурився такій «похвалі» (вона кидала тінь на весь Ужгород, а не лише на мене і моїх старших знайомих), але стримався і вирішив спробувати переконати його у протилежному. Коли виявилося, що він як і я, прямує в Інститут математики, то я ще раз жахнувся, бо на нас чекала пересадка на Виставці народного господарства на інший автобус і подорож разом в цілому аж на дві години. Але я ще раз стримався і відповів, що у цих вчених є беззаперечні і дуже цікаві наукові результати. На це він сказав, що результати Фущича, то є бухгалтерський перелік симетрій різних рівнянь без жодного застосування, яке очевидним чином напрошується. Я сказав, що така база даних, яку він сам тільки що визнав, вже сама по собі чудовий результат і кожен вчений у світі, після її створення Вільгельмом Іллічем, може її застосовувати і використовувати.

Тоді він переключився на Ломсадзе і розпочав ударом під дих, як той міг написати таку статтю у «Закарпатську правду»? Я відразу заперечив, якщо добавити малесеньке слово модель, тобто розглянути закон збереження у рамках моделі Вайтмана, Тіррінга, або Ейнштейна–Подольського–Розена і т.д., то відразу все стає нормальним. А «журналюги» полюбляють пропустити слово чи рядок або по тупості своїй, або по підлості (я сам журналіст, тому наспілкувався достатньо з цією братією), і не треба забувати хазяїв газети «Закарпатська правда», з якими Ломсадзе не уживався. Вже сама табличка «Theory of Hadrons Department» у них під носом на стіні будинку поряд з обкомом партії їх надзвичайно дратувала.

Ще можна було сказати йому зовсім інше, що коли відкриваєш щось принципово нове, сильно випереджаючи час і наукове сьогодення, то натикаєшся на супротив журналів, туманні рецензії і тягне хоч у газеті оповістити людей (див., наприклад, переживання та долю Майстра з роману М.А. Булгакова «Майстер і Маргарита» з

висновком «рукописи не горять»). Але я вирішив, що Петрині не слід цього говорити. Навряд чи з ним таке траплялося і чи він це зрозуміє.

А поки я вибирав тактику, Петрина заводився все більше і більше. Хто знав цю людину, той знає як непросто було з ним дискутувати. Якби розмова була короткою, то він би переміг. А так – автобус їде, а я, маючи час подумати, – заперечую. Я вирішив застосувати системний підхід. «Давайте визначимо критерії провінційності науки» – сказав я. Якщо визначати по місцю, де зроблена наука, то це смішно. Я тоді нещодавно побував у Марселі у провінції Прованс у лабораторії імені Шарля Фабрі і Альфреда Перо, тому зауважив вживши каламбур провінція-прованс. «Хіба їх наука стала провінційною від того, що вони з Провансу?» – намагався я шуткувати щоб не матюкатися. Але цей дядько не здавався. А я придумовував нашвидку справжні критерії провінційності науки. По-перше, якщо результат звучить «Вперше на Закарпатті застосовано метод гіперсферичних координат» або «Вперше у СРСР отримано ієрархію…», то так, це ознака провінційності науки. Бо наука – це тільки тоді, коли вперше у світі! По-друге, якщо опубліковано лише у «Віснику УжНУ» або лише у препринті Інституту теоретичної фізики, а серйозні журнали не беруть, то так, це ознака провінційності. І, нарешті, якщо навіть опубліковано у серйозному журналі, але роками ніхто не посилається, то це ознака провінційності результату, але скоріше – це ознака навіть неправильності результату або просто його нікчемності, непотрібності процесу розвитку науки. Але легко бачити, що ні Ломсадзе, ні Фущич зовсім не підходять під ці критерії.

Я ще згадував про виступи на міжнародних конференціях. Провінційний вчений на конференції не їздить, наукові результати у відкритих дискусіях не апробує. Такі, як правило, глибоко ховаються за стінами домашніх інститутів або вишів. Хіба це відносилося до Ломсадзе або Фущича? Фущич навіть журнал свій започаткував – відомий міжнародний журнал з нелінійної математичної фізики. А скільки конференцій організував і провів Ломсадзе в Ужгороді? Хотілось перемкнути Дмитра Яковича на конференцію, яка тільки но закінчилася в ІТФ, що, до речі, і привело до нашої випадкової зустрічі, але не подіяло.

Вирішив переключити Дмитра Яковича на зовсім іншу бесіду і сказав, що добре пам’ятаю наше з ним знайомство у січні 1987 року на засіданні спецради по захисту кандидатських дисертацій у Київському університеті. Точніше у перерві і кофе брейку між двома захистами. Першим захищався громадянин Північної Кореї Пек Єн Мен, а другим автор цих рядків [6]. Це був перший захист після Чорнобильської катастрофи, бо зібрати спецраду і забезпечити кворум раніше було просто неможливо. Зрозуміло, що спецрада зібралася не задля мене, а мені ставилася додаткова задача – обов’язково захистити перш за все корейця. Після його доповіді ламаною російською мовою члени спецради боялися задати запитання. Виникла не потрібна пауза. Єдине запитання озвучив саме Дмитро Якович. Мова йшла про пучок нейтронів і про властивості гафнієвих фільтрів.

- А що буде, якщо фільтри прибрати?

Кореєць з надією подивився на мене, я ж висунув обличчя із за спини свого опонента, рішуче помахав головою в знак протесту і скорчив на обличчі рвотну гримасу.

- Е нее! Будет оцен нехарашоо – відповів кореєць і за кілька хвилин вже був одноголосно проголошений кандидатом наук.

Дмитро Якович також був єдиним, хто помітив і розшифрував підказку, тож на кофе брейку ми з ним доброзичливо жартували. Він пожартував і тоді в автобусі: «Не дуже смійтеся, бо цілком можливо, що з цим корейцем вам ще доведеться зустрітися!»

Ми обидва трохи замислилися. На наших очах змінювалась епоха. У попередні часи ми самі навчали громадян Північної Кореї у тому числі і військовим секретам. А що буде далі?

Але від розбору по кісточках Ломсадзе я його лише на хвильку відволік.

Дискусія загострювалася, тож у суперечці я все частіше наводив приклади типу стохастичної динаміки, ієрархії, Інституту теоретичної фізики, щоб він задумався, як колись цілком можливо скажуть і про нього. Кращий захист – це напад. Петрина не здавався, придумовував свої докази, я також стояв у ці миттєвості вже не за себе, не за Ломсадзе і Фущича, а за весь науковий Ужгород. Часу пройшло вже понад годину, ми вже приїхали і прямували до Інституту математики, коли до мене підійшов Борис Володимирович Струмінський зі щирою радістю на обличчі. Ситуація розрядилася. Дмитро Якович швиденько попрощався і пішов до інституту, а ми там зустрілися з Борисом Володимировичем не випадково і, насправді, для зовсім інших речей, і жодним чином не для Дмитра Яковича.

Мотиви Д.Я. Петрини до тієї дискусії я не зрозумів тоді і вже ніколи не зрозумію. Мені довелося кілька разів спілкуватися з ним вже на наукові теми. Без сумніву, це був видатний український вчений, див., наприклад, його книгу [13]. Як людина, яка сама трохи причетна до написання книг, розумію масштаби творчості цього вченого.

Я згадав про цю нав’язану мені дискусію не випадково. Коли нещодавно керівництво інституту запропонувало провести всеукраїнський семінар до 100-річчя з дня народження Ю.М. Ломсадзе і включило мене до Програмного комітету, то я категорично заперечив всеукраїнський рівень заходу, навіть ціною почути відомі у таких випадках слова «ініціатива наказуєма, роби сам». «Повинна бути міжнародна конференція» – рішуче заявив я. Тому що відразу пригадалася та дискусія з Петриною. Жодної ознаки провінційності не потрібно створювати власноруч! Таким чином, я опинився у самому горнилі процесу організації цієї міжнародної конференції, хоча здоров’я не завадило б мати трохи більше. Моя задача – продемонструвати міжнародне значення нашого Вчителя. Як це вийшло у мене і моїх друзів за той мізерний час, що залишався, то вже не мені судити.

Якщо вже зайшла мова про наукове значення результатів Ломсадзе, то повинен згадати про результат, який на мою думку є одним з найважливіших. Мова йде про можливість миттєвої передачі інформації на основі редукції хвильової функції, про глибокий аналіз парадоксу Ейнштейна–Подольського–Розена та його наслідків. Це було за останній рік його перебування в Ужгороді. Він тоді зробив серію семінарів у

відділі теорії адронів та університеті. Його думки лише частково зрозуміли його кращі учні, які були присутні: Іван Юрійович Кривський, Омелян Петрович Сабад, Йосип Михайлович Шуба, Сергій Юрійович Медведєв. Вони потім часто і багато розповідали мені про це, коли я вже трохи знав основи квантової теорії і доріс до розуміння. Сьогодні бачиться, що Юрій Мелітонович надовго випередив свій час і одним із перших звернув увагу на справжнє значення таких понять як «quantum entanglement», переплутані стани, можливість миттєвої передачі інформації – все те, що прокладає шлях до квантових комп'ютерів.

Одним з важливих здобутків конференції до 100-річчя з дня народження Ломсадзе було б знаходження і поширення інформації про цей важливий результат вченого. Взагалі, було б дуже корисним опублікувати у збірнику праць конференції список усіх публікацій Ю.М. Ломсадзе. Щодо аналізу парадоксу Ейнштейна–Подольського–Розена та його наслідків, то цілком можливо, що вчений надсилав цей матеріал до друку вже працюючи у Північній Осетії. Одну статтю [14], і навіть посилання на неї у відомому огляді [15], вдалося знайти. Але зв'язок з Північно-Осетинським університетом сьогодні не просто налагодити і знайти усі праці вченого, що відносяться до даної тематики, досить проблематично. А тема, до якої відноситься праця Ломсадзе з сином Шотою [14] сьогодні надзвичайно актуальна, див., наприклад, дослідження [16–18].

Не менш важливим було б опублікувати у відомому міжнародному журналі статтю з викладенням цього результату [14]. Прикладів подібних речей у світовій науці є багато. Я неодноразово цитував статтю трьох італійських вчених (до речі, пізніше, я був знайомий з ними), які опублікували сторінки зі щоденника Етторе Майорана [19]. Їхня доречна згадка про неопубліковані раніше результати Майорана цитована 206 разів.

Слід зауважити, що аналізу парадокса Ейнштейна–Подольського–Розена Юрій Мелітонович приділив незначну увагу. Основним напрямком його наукових досліджень була аксіоматична квантова теорія поля. Я вже згадував розвиток аксіоматичного підходу Вайтмана [3, 4], але професор Ломсадзе не обмежувався одним напрямком у аксіоматиці. Разом з учнями він досліджував кілька різних аксіоматичних підходів. На жаль в ті часи у світовій науці вже спостерігалась тенденція зниження інтересу до аксіоматичних підходів до квантової теорії поля. Перемагала прагматика швидкого отримання результатів, аналіз основних принципів почав відігравати другорядну роль. Змінювалась епоха, змінювалось покоління дослідників.

Другий епізод до повноти есе про Ломсадзе – телефонна розмова з президентом Академії наук Грузії Альбертом Нікифоровичем Тавхелідзе. Ми сиділи вдома у мого старшого друга Бориса Володимировича Струмінського і нудьгували. Наші зарплати у доларовому еквіваленті були мізерними, закордонні гроші мені надоїло жебрати, а йому тоді не світило. А ще і наші інститутські зарплати затримувались на невизначений строк.

- Давай зателефонуємо до Тавхелідзе – запропонував, повеселівши від вдалої задумки, Борис.
- До Тавхелідзе? – та навіщо, не зрозумів я.

Але професору вже прийшла під руку весела думка, і його було не зупинити.

- Ти що, з Президентом грузинської академії наук не хочеш поговорити?
- Та мені якось по-барабану. Не так давно з академіком Петриною дві години набалакався.
- Це тобі не Петрина і взагалі слухай старших, Ось почуєш, буде весело.

Погодитися на телефонний дзвінок не проблема, але слухавка від Бориса відразу була піднята. Він з притаманною йому вихованістю (до друзів) ввічливо поцікавився про здоров'я, про рідних і близьких, про роботу. А потім запитав.

- Послухай, а яка у тебе зарплата?

Виявилося, що у доларовому еквіваленті зарплата у Президента Академії наук Грузії менша ніж у Бориса і, навіть, менша ніж у мене. Ось таке з нами тоді витворяли наші рідні держави, Україна і Грузія. Дійсно стало весело.

Потім Борис розповів йому про мене, трохи перехвалив, що мене роздратувало, але Тавхелідзе несподівано погодився зі мною поспілкуватися. Він розпитав про Ужгород, про учнів Ломсадзе, яких, виявляється, добре знав. Розпитав мене про мою роботу і наукові інтереси. Я нагадав, а він сказав, що знає про мої успішні московські семінари, зокрема, у академіка Логунова та професора Міріана Олексійовича Мествірішвілі. А потім несподівано запитав.

- Послухайте, а що то за грузин, Ломсадзе, який не знав грузинської мови?
- Мене ніколи не цікавило чи знав він грузинську мову, але він був справжній джигіт!

Тавхелідзе також стало весело і він попросив передати слухавку Борису.

Я розповів правду і тільки правду про те, що було у мене з професором Ломсадзе та пов'язувало мене з ним, і що часто нагадує мені про нього, коли сьогодні не має з ким кардинально поговорити про наукові проблеми, що стосуються пояснення темної матерії та темної енергії, розібрати математичні деталі.

Про більшу, ніж потрібно по моєму формальному статусу, участь у організації даної конференції не шкодую, бо навіть у цей момент ясно, що до проведення конференції залучилось четверте покоління наукових нащадків Ломсадзе! Дійсно, якщо Іван Юрійович Кривський – це перше покоління, Володимир Михайлович Симулик – це друге покоління, то тоді Роберт Рудольфович Ломпей –вже третє покоління, а Денис Іванович Бондар –четверте покоління. Отже, про Ломсадзе пам'ятають і будуть пам'ятати довго!

Чому? Відповім так. Він залишив після себе здібних учнів і жив по мрії, ну а більшість людей, часто навіть людей-ферміонів, жити по мрії просто боягузять!

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. Gravitation (W.H. Freeman and Company, San Francisko, 1973) – 1284 p.
2. S. Weinberg. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (John Wiley & Sons Inc., New York, 1972) – 657 p.
3. Ю.М. Ломсадзе, І.Ю Кривський, Й.М. Шуба. Побудова аксіоматичної схеми Вайтмана для зосереджуваного поля. VIII. Поліноміальна кластерність функцій Вайтмана. // Укр. фіз. журн. – 1978 – Т. 23, №10. – С. 1608–1615.
4. Ю.М. Ломсадзе, І.Ю Кривський, Й.М. Шуба. Універсальне вайтманове поле. I. // Укр. фіз. журн. – 1981 – Т. 26, №10. – С. 1591–1597.
5. I.Yu. Krivsky. Axiomatic construction of the local and nonlocal field theory and electrodynamics in the terms of electromagnetic field strength tensor // Author's abstract of a thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences: 01.04.02. Minsk: 1989 – 32 p.
6. В.М. Симулик. Application of the variational principle to the electrodynamics in the terms of field strengths and its algebraic theoretical analysis // Author's abstract of a thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences: 01.04.02. Kyiv: 1987 – 18 p.
7. І.Ю. Кривський, В.М. Симулик. Основи квантової електродинаміки в термінах напруженостей (Наукова думка, Київ, 1992) – 288 с.
8. V.M. Simulik. Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory // J. Phys: Conf. Ser. – 2016 – V. 670. – P. 012047(1–16).
9. V.M. Simulik. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin s=2 // J. Phys: Conf. Ser. – 2017 – V. 804. – P. 012040(1–10).
10. В.М, Симулик. Релятивістські рівняння для довільного спіну, зокрема для спіну s=2 // Укр. фіз. журн. – 2019 – Т. 64, №11. – С. 1057–1061.
11. V.M. Simulik. Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory of Arbitrary Spin (Nova Science, New York, 2020) – 343 p.
12. B.H. Yandell. The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers (A K Peters Ltd, Natick, Massachusets, 2002) – 487 p.
13. D.Ya. Petrina. Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems. (Kluwer, Amsterdam, 1995) – 624 p.
14. Yu.M. Lomsadze, Sh.Yu. Lomsadze. Explanatory axiomatics of quantum theory: resolution of Einstein–Podolsky–Rosen paradox // Sov. Phys. J. – 1982 – V. 25, No 2. – P. 92–96.
15. D.N. Klyshko. A simple method of preparing pure states of an optical field, of implementing the Einstein–Podolsky–Rosen experiment, and of demonstrating the complementarity principle // Sov. Phys. Usp. – 1988 – V. 31, No 1. – P. 74–85.

16. H.M. Wiseman, S.J. Jones, A.C. Doherty. Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox // Phys. Rev. Let. – 2007 – V. 98, No 14. – P. 140402(1–4).
17. M.D. Reid *at al*. Colloquium: The Einstein–Podolsky–Rosen paradox: From concepts to applications // Rev. Mod. Phys. – 2009 – V. 81, No 4. – P. 1727–1751.
18. P. Colciaghi, Y. Li, P. Treutlein, T. Zibold. Einstein–Podolsky–Rosen Experiment with Two Bose-Einstein Condensates // Phys. Rev. X. – 2023 – V. 13, No 2. – P. 021031(1–10).
19. R. Mignani, E. Recami, M. Baldo. About a Dirac-like equation for the photon according to Ettore Majorana // Lett. Nuov. Cim. – 1974 – V. 11, No 12. – P. 568–572.

V.M. Simulik

Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
21, Universitetska Str., 88017,Uzhgorod, Ukraine
e-mail: vsimulik@gmail.com

THREE UNFORGETTABLE MEETINGS WITH THE PROFESSOR Yu.M. LOMSADZE, Essay about Lomsadze

The author's memories of three unforgettable meetings with Professor Yuriy Melitonovich Lomsadze, written in the style of an essay, are presented. The author's opinion about the role of Yu.M. Lomsadze in the development of theoretical physics in Uzhgorod and about his contribution to world science are considered. Comments about Professor Lomsadze as a person, and about the fate of a scientist in general, are added. The influence of communication with Y.M. Lomsadze to the fate of the author is described.
Keywords: history of physics, axiomatic quantum field theory, quantum electrodynamics, quantum mechanics, Einstein–Podolsky–Rosen paradox, reduction of wave function.

J. Jellinek
Argonne National Laboratory,
Lemont, Illinois 60439, USA
e-mail: jellinek@anl.gov

IN PURSUIT OF FUNDAMENTAL ASPECTS OF PHYSICS

The pursuit of fundamental questions in physics and the quest for an ever deeper understanding of its foundational concepts are endeavors that will never exhaust themselves. They extend to all areas of physics and encompass systems and phenomena that are both new and old. This contribution presents and discusses three subjects of fundamental interest in what can be viewed as more traditional areas of physics.

Keywords: Temperature, degrees of freedom, ergodicity, anharmonicity, nanosystems, polarizability, universality.

Introductory note

The central themes of this Conference dedicated to the 100-th anniversary of Prof. Yu. M. Lomsadze – high energy physics, quantum field theory and theory of elementary particles – lie in the very foundation of physics. It is these themes that had been in the focus of Lomsadze's interests and research activity throughout his life. His work on quantum theory of measurements was decades ahead of its time and dealt with issues that are of direct relevance to today's "hot subjects" of quantum entanglement, teleportation and quantum computers. His curiosity extended to other areas as well, provided the question asked were fundamental. Therefore, inclusion in the program of the broader field of theoretical physics is indeed appropriate. And it is within this broader area that the subjects of this contribution fall into.

Below we touch on three issues as examples that present questions of fundamental interest in more traditional areas of physics. The presentation is necessarily limited and based largely on our own work. The emphasis is on the conceptual aspects, rather than the technical details; the latter can be found in the publications included in the list of references.

Temperature and dynamical degrees of freedom

The origin of the notion of temperature T is in thermodynamics where it is introduced as the intensive variable conjugate to entropy S as the extensive variable. In the canonical ensemble framework of statistical physics, temperature emerges as a Lagrange multiplier in the course of derivation of the Boltzmann distribution function guided by the principle of maximization of entropy. It follows then that the vibrational temperature of a nontranslating and nonrotating system is

$$T = \frac{2\langle E_{kin}\rangle}{(3N-6)k}, \tag{1}$$

where $E_{kin}$is the kinetic energy of the system, N is the number of atoms in it, k is the Boltzmann constant and $\langle \dots \rangle$ stands for ensemble average.

Relationship (1) is obtained also in the framework of the microcanonical ensemble [1], provided the latter is characterized in terms of the phase space volume (or sum of states) Ω,

$$\Omega(N,V,E) = c\int\dots\int d\boldsymbol{r}_1\dots d\boldsymbol{r}_N d\boldsymbol{p}_1\dots d\boldsymbol{p}_N\theta[E - H(\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{p}_1\dots\boldsymbol{p}_N)], \qquad (2)$$

rather than the phase space density (or density of states) ρ,

$$\rho(N,V,E) = c\int\dots\int d\boldsymbol{r}_1\dots d\boldsymbol{r}_N d\boldsymbol{p}_1\dots d\boldsymbol{p}_N\delta[E - H(\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{p}_1\dots\boldsymbol{p}_N)], \qquad (3)$$

where E and H are, respectively, the total energy and the Hamiltonian of the system, V is its volume, $\boldsymbol{r}_i$ and $\boldsymbol{p}_i$ are, respectively, the coordinate and the momentum of the i -th atom and c is the normalization constant. The intensive nature of temperature means that the temperature of any subsystem of the system, including its individual atoms and even the individual degrees of freedom of every atom, is the same as that of the entire system. That, in turn, implies that the average kinetic energy is partitioned between all the $3N-6$ vibrational degrees of freedom equally. As a consequence, Eq. (1) is referred to as the equipartition theorem.

Equation (1) is used also in molecular dynamics (MD) simulations where $\langle\dots\rangle$ denotes long-time averaging. The MD simulations, however, show that in finite systems, such for example as atomic clusters, the equipartition theorem may not hold. At low and intermediate energies, the average kinetic energy per atom may be different in different subsystems. An example is the subsystem formed by the surface atoms of a cluster *vs* that formed by the interior atoms. The implication for the temperature is that in finite systems it may lose its character as an intensive variable.

Is there a remedy? Can one restore the intensive character of temperature in finite systems? The answer to this question is actually "yes". The solution [2] is to associate with each l-th subsystem of a finite system an effective number of degrees of freedom f_l such that

$$\frac{2\left\langle E_{kin}^{l}\right\rangle}{f_l k} = T, \qquad (4)$$

where $\left\langle E_{kin}^{l}\right\rangle$ is the time-averaged kinetic energy of the l-th subsystem, and the common for all subsystems T is the vibrational temperature of the entire system defined by Eq. (1). Equation (4) constitutes a modified equipartition theorem, where the equipartition is restored and holds with respect to degrees of freedom f_l. Substitution of Eq. (1) into Eq. (4) leads to

$$f_l = \frac{\left\langle E_{kin}^{l}\right\rangle}{\langle E_{kin}\rangle}(3N-6). \qquad (5)$$

It follows from Eq. (5) that if the averaged kinetic energy of a subsystem is zero (i.e., it is a "spectator" that does not participate in the dynamics of the system), its $f_l = 0$. In distinction from the traditional degrees of freedom, which are kinematical characteristics that represent the dimensionality of the corresponding configuration space, the f_l are dynamical characteristics that serve as a measure of the degree of participation of the different subsystems of a system in its overall dynamics. Therefore, they can be called *dynamical degrees of freedom* (*ddf*). The *ddf* satisfy the sum rule

$$\sum_l f_l = (3N - 6). \quad (6)$$

One of the applications of the *ddf* is in the analysis of the phenomenon of the finite-size analog of the bulk melting transition where they play an invaluable role in the identification and characterization of the different stages involved in the transition. In contrast to crystalline bulk materials, where melting is a sharp first order phase transition with a well-defined melting temperature, the meltinglike transition in finite systems takes place over a finite range of energy (under conditions corresponding to the microcanonical ensemble) or temperature (under conditions corresponding to the canonical ensemble). Over these ranges, the systems exhibit multiple distinct stages in their dynamical behavior and stepwise transitions between these stages; see, e.g., Ref. 3 and the citations therein. At a given energy, or temperature, different atoms of the system behave, in general, differently. This difference can be identified and gauged by the difference in their *ddf* values. Atoms with the same (within a predefined degree of accuracy) value of *ddf* can be combined into classes of dynamical similarity. The number and the atomic content (identity of atoms) of the different classes of dynamical similarity remain unchanged over certain segments of the system energy, or temperature, in the overall transition range, but then at some values of the energy, or temperature, they undergo a change as a result of some of the classes merging together. This process of sequential stepwise merging of the different classes of dynamical similarity continues until all of them become a single class. When it happens, all atoms of the system become dynamically equivalent, and the system's state can be characterized as liquidlike. The *ddf*-based number of different classes of dynamical similarity, the atomic content of each class, and the changes in the number of distinct classes with the system's energy, or temperature, constitute a comprehensive order parameter that allows for identification and characterization of all the stages involved in the meltinglike transition of a finite system.

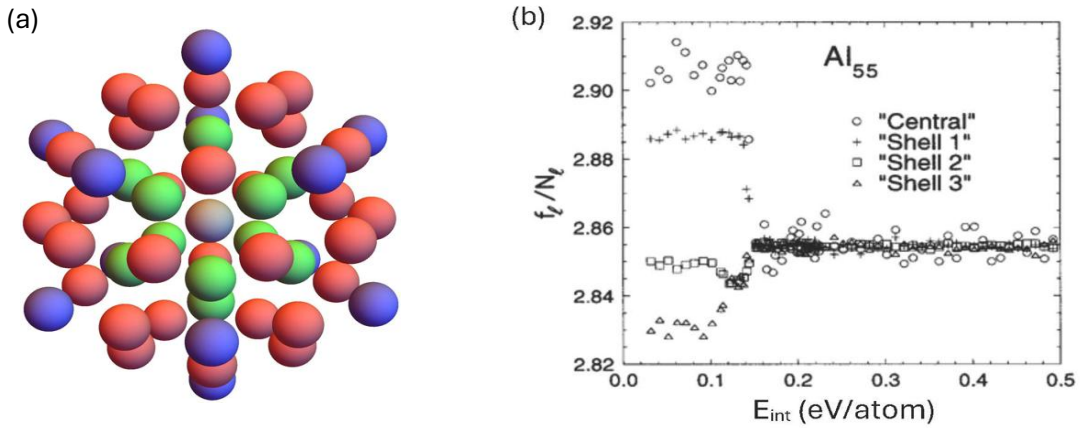


Figure 1. Panel (a): Equilibrium icosahedral structure of a model Al_{55} cluster. Color coding: grey – central atom, green – 12-atom first shell, red – 30-atom second shell, blue – 12-atom third shell. Panel (b): Dynamical degrees of freedom per atom f_l/N_l of the subsystems of Al_{55} as a function of the cluster internal energy E_{int} per atom (see the text for details).

An illustration for the case of a model 55-atom Al cluster is presented in Fig. 1 [2]. The lowest energy equilibrium (i.e., zero temperature) configuration of this cluster is a perfect icosahedron shown in panel (a) of the figure. In this configuration, there are four classes of structural similarity. The first class contains the central atom, the second class is comprised of 12 geometrically equivalent atoms that form the first shell around the central atom, the third class incorporates 30 geometrically equivalent atoms that form the second shell, and the fourth class is comprised of 12 geometrically equivalent atoms that form a close-lying third shell. It is natural to expect that at low internal energies the four classes of original structural similarity will give rise to four classes of dynamical similarity. The graphs of f_l/N_l, where N_l is the number of atoms in the l-th subsystem, shown in panel (b) of the figure confirm that this is indeed the case. Then, as the energy of the cluster is increased, the second and the third shells merge together. This merger, as judged by the changes in the corresponding values of the *ddf* per-atom, occurs largely through atoms of the third shell moving into the second shell. At still higher energy, the atoms of the first shell also join in. And, finally, at still slightly higher energy, the central atom joins the class of dynamical similarity of the other 54 atoms as well. All the atoms of the cluster are now dynamically equivalent indicating that it acquired its liquidlike state. The *ddf*-based analysis illustrated in Fig. 1 can be carried out for any finite system, including a heterogeneous one (i.e., comprised of different types of atoms). In the case of heterogeneous finite systems, the meltinglike transition becomes a more complex phenomenon where some atom(s) of one element may mimic, over a certain energy segment, the dynamical behavior of atoms of another element (the "chameleon effect") and where the atoms of different elements behave dynamically differently even in the liquidlike state of the system. For more on this, as exhibited by nanoalloys (i.e., alloy nanosystems), we refer the reader to Ref. 4.

Dynamics-based statistical mechanics

The two main conceptually distinct fundamental frameworks used in the analysis and characterization of physical systems are dynamics and statistical mechanics. Dynamics aim at furnishing detailed microscopic description of the state of a physical system as it evolves in time. The focus of statistical mechanics is on collective behavior of ensembles of equivalent systems. Historically, a driving motive for introduction of statistical mechanics was the desire to find an alternative to the impractical detailed dynamical description of systems with a very large number of degrees of freedom.

The connection between dynamics and statistical mechanics is established by the ergodicity hypothesis, which assumes that the time-averaged characteristics of systems and their statistically averaged characteristics agree with each other. The mathematical underpinning of the ergodicity condition is the von Neuman-Birkhoff theorem [5] that connects Hamiltonian dynamics with the microcanonical ensemble and states that ergodicity is equivalent to metric indecomposability of the phase space associated with a system of a given energy. An underlying *a priori* assumption of the microcanonical ensemble is that all the microstates corresponding to a given energy of the system (these microstates form an

energy shell in the phase space) are equiprobable; in what follows, we refer to this assumption as the equiprobability assumption. For a dynamical system to be ergodic (or, alternatively, be viewed as behaving ergodically), in its time-evolution it has to visit the vicinity of almost every point of the energy shell with equal probability. Dynamical systems may or may not behave ergodically, and even when they do at high energies they may not at low and intermediate energies.

The central quantity of statistical mechanics is the density of states (DOS). The knowledge of the DOS as a function of energy allows for calculation of other statistical mechanical characteristics such as the partition function, entropy, and free energy, as well as the various descriptors that derive from them. The DOS also plays a key role in the characterization of rates of processes, for example rates of chemical reactions, within the frameworks of the transition state and phase space theories.

The dynamics of systems can be partitioned into component motions that underlie the total density of states. These component motions are the translation, the vibrations and the overall rotation of the system. The translation can be separated from the vibrations and the rotation, and its DOS is well defined [6]. The vibrations and the rotation, however, are in general coupled and their combined density of states is known only for the case of near-rigid systems in which this coupling can be neglected. The small-amplitude vibrations in this case are usually treated within the harmonic approximation and the overall rotation is viewed and treated as that of a rigid body that coincides with the equilibrium structure of the system. Considerable effort has been invested over the decades into relaxing the restriction of harmonicity on the vibrations, and various schemes to achieve this have been devised (see the citations in Ref. 7). All these schemes, however, are approximate and applicable only to cases with a limited departure from harmonicity.

The only cases for which *exact and fully analytical* expressions for the vibrational DOS were known until recently are those of the harmonic oscillator, the Morse oscillator, and a particle in a box, as well as systems comprised of uncoupled sets of these oscillators. The classical vibrational DOS $\rho(E)$ of a system of uncoupled harmonic oscillators is given by

$$\rho(E) = \frac{(E - E_0)^{s-1}}{(s-1)! \prod_{i=1}^{\check{s}} (\hbar\omega_i)^{g_i}}, \quad \sum_{i=1}^{\check{s}} g_i = s, \tag{7}$$

where E_0 is the energy of the equilibrium structure of the system, s is the total number of oscillators in it, $\check{s}$ is the number of oscillators with different frequencies ω_i, g_i is the degeneracy of the frequency ω_i (i.e., the number of oscillators that have the same frequency ω_i) and $\hbar$ is Planck's constant. Eq. (7) is derived taking into account the equiprobability assumption.

Below we consider the case of systems with zero total linear and angular momenta and focus our attention on their classical vibrational DOS. A long-standing and persistent

fundamental question regarding this case is: Can one obtain a *general and exact solution* to the problem of vibrational DOS that reflects the true dynamical behavior of systems (either ergodic or nonergodic in the traditional sense) that is free from the equiprobability assumption and that is valid for any degree of anharmonicity of the vibrations? A recent development [7] provides a positive answer to this question. The solution is based on two new elements. The first replaces the normal mode frequencies of the system (i.e., the frequencies of the harmonic vibrations that correspond to its equilibrium structure) by the energy-dependent frequencies of the effective harmonic modes that underlie its true anharmonic dynamics at different energies. The second element removes the equiprobability assumption and its consequence that the different underlying harmonic modes share the energy of the system on average equally (i.e., that they participate in the dynamics equally) and replaces it by a mode- and energy-specific measure of the actual participation of each mode in the overall anharmonic vibrational dynamics of the system (see below).

The spectrum of harmonic frequencies that underlie the true anharmonic dynamics of a nontranslating and nonrotating system is furnished by its spectral density $I(\omega)$ (often also referred to as power spectrum), which in accordance with the Wiener-Khinchine theorem can be obtained as

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{\infty} C(\tau) Cos(\omega\tau) d\tau \quad , \tag{8}$$

where $C(\tau)$ is the normalized velocity autocorrelation function,

$$C(\tau) = \frac{\langle \boldsymbol{v}(t_0)\boldsymbol{v}(t_0+\tau)\rangle}{\langle \boldsymbol{v}^2(t_0)\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i(t_{0j})\boldsymbol{v}_i(t_{0j}+\tau)}{\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i^2(t_{0j})} \quad . \tag{9}$$

The spectral density represents harmonic modes because Eq. (8) constitutes a Fourier transform (i.e., a harmonic decomposition). $C(\tau)$ is calculated along MD trajectories run with zero linear and angular momenta for different energies of the system. In Eq. (9), $\boldsymbol{v}_i$ is the velocity of atom i and n_t is the number of different time origins t_{0j} chosen along the trajectory; n_t should be large enough to properly average over the initial phases of all the modes. The schematic of a typical spectral density is shown in Fig. 2. The implementation of the new methodology involves discretizing the spectral density $I_E(\omega)$ into K segments and associating with each j-th segment a representative frequency $\omega_j(E)$ (which can be chosen, for example, as the midpoint of the segment) and an area $h_j(E)$,

$$h_j(E) = \int_{\omega_j^{\min}}^{\omega_j^{\max}} I_E(\omega) d\omega \quad , \tag{10}$$

where ω_j^{min} and ω_j^{max} are the frequency endpoints of the segment; the subscript E in $I_E(\omega)$ underscores the fact that it is derived from data accumulated along a fixed-energy MD

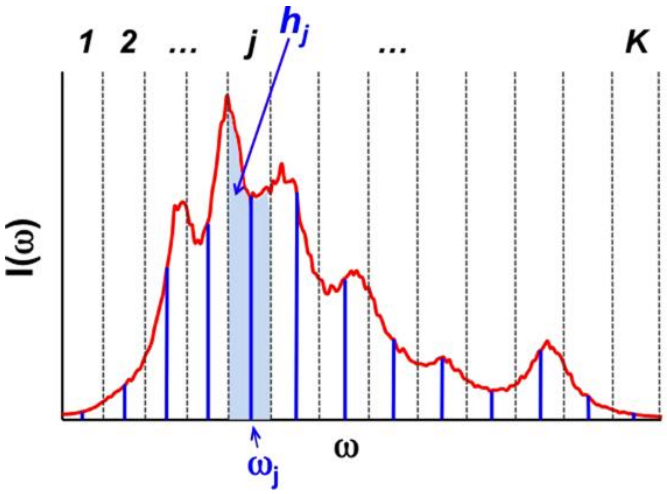


Figure 2. Schematic of discretization of spectral density.

trajectory. It can be shown [7] that the total area h under the spectral density $I_E(\omega)$ is

$$h = \sum_j h_j(E) = \int_0^\infty I_E(\omega)\, d\omega = \pi \tag{11}$$

for any value of the system energy E, and that the area $h_j(E)$ under the j-th segment of the spectral density is

$$h_j(E) = \frac{\langle E_{kin}^j \rangle}{\langle E_{kin} \rangle} \pi, \tag{12}$$

where $\langle E_{kin}^j \rangle$ is the E-dependent time-averaged kinetic energy of the modes belonging to the j-th segment of the spectral density and $\langle E_{kin} \rangle$ is the time-averaged kinetic energy of the entire system. Normalizing the total area h to the total number of vibrational degrees of freedom s of the system,

$$Ah = A\int_0^\infty I_E(\omega)\, d\omega = s \ , \tag{13}$$

where $A = s/\pi$ is the normalization constant, and taking into account Eq. (12), one can introduce for each representative frequency $\omega_j(E)$ a corresponding dynamically defined degree of participation, or effective degeneracy, $g_j(E)$,

$$g_j(E) = Ah_j(E) = \frac{s}{\pi} h_j(E) = \frac{\langle E_{kin}^j \rangle}{\langle E_{kin} \rangle} s. \tag{14}$$

When the internal energy of the system decreases and eventually approaches zero, its spectral density becomes piece-wise continuous and then discrete, and its frequencies $\omega_j(E)$ eventually approach the normal mode frequencies ω_i. The effective degeneracies $g_j(E)$, however, may not converge to the degeneracies g_i of the normal modes because the g_is are kinematical characteristics defined by the symmetry of the equilibrium structure of the system

whereas the $g_j(E)$s are dynamical characteristics that carry the memory of the actual partitioning of the energy between the underlying harmonic modes.

Comparison of Eq. (14) with Eq. (5) makes it clear that Eq. (14) represents a generalization of the notion of dynamical degrees of freedom, originally formulated in the space of Cartesian coordinates, to the space of collective coordinates of the harmonic ("effective normal") modes of the spectral density. The effective degeneracy $g_j(E)$ of the representative frequency $\omega_j(E)$ is nothing but the *ddf* associated with the subset of modes that belong to the *j*-th segment of the spectral density. Replacing in Eq. (7) the normal mode frequencies ω_i by the representative frequencies $\omega_j(E)$ and the degeneracies g_i by the effective degeneracies $g_j(E)$ one obtains

$$\rho(E) = \frac{\left(E - E_0\right)^{s-1}}{(s-1)!\prod_{j=1}^{K}\left[\hbar\omega_j(E)\right]^{g_j(E)}}, \qquad \sum_{j=1}^{K} g_j(E) = s \quad . \tag{15}$$

The value of the parameter *K* in the above equations (the number of segments into which the spectral density is partitioned, see Fig. 2) has to be varied (increased) until $\rho(E)$ acquires its converged value within a predefined degree of accuracy.

Equation (15) constitutes a general and exact solution to the problem of anharmonic densities of states. It is free from the equipartition assumption and it reflects the actual dynamical evolution of the system at a given energy. Therefore, the statistical mechanics built on $\rho(E)$ as defined by Eq. (15) and the dynamics that underlie them are by construction ergodic with respect to each other (the statistical averages are equal to the time-averages) irrespective of whether the dynamics are ergodic or not in the traditional sense (i.e., with respect to the traditional statistical mechanics). The assured ergodicity is achieved here by "adjusting" the statistical mechanics to the dynamics, rather than *vice versa*, which has been the case traditionally; different ingenious techniques have been devised in the past to force the dynamics to sample the entire energy shell, or at least its relevant parts, more efficiently. This "subordination" of statistical mechanics to dynamics, rather than *vice versa*, is only natural because the actual evolution of systems is governed by forces and is dynamical.

This new development has a number of implications. The first is that it introduces time into statistical mechanics. One may be interested in a statistical mechanical analysis and description of a process that takes place over a limited time window (for example, the time window of a rapid process or of an experiment). That can be accomplished by carrying out the MD simulations over the time window of interest and then generating the spectral density $I(\omega)$ Eq. (8), and the following from it DOS $\rho(E)$, Eq. (15), that correspond to that time window. Even more generally, one can perform a statistical mechanical characterization of the time-evolution of the system by generating its time-dependent DOS $\rho(E,t)$. The second implication is that one can, if desired, account for the role of the initial conditions in the statistical mechanical description. One may, for example, be interested in the behavior of a system prepared initially in one of its possible structural forms or with a known initial

distribution of the energy between its modes (experiments on single molecules prepared in a well-defined initial state would be a realistic case in point). The MD runs are then performed starting with those initial conditions and they generate $\rho(E)$ or $\rho(E,t)$ corresponding to those initial conditions. The choice of the initial conditions can be adjusted to the nature of the questions asked and/or to the specifics of an experiment. For example, if an experiment is performed on an ensemble of molecules, all of the same type and with the same energy, but possibly different initial structure or different initial distribution of the energy between the modes of the molecule, the MD runs would involve an ensemble of trajectories corresponding to those initial conditions.

Finally, one can ask the question: Why to "translate" the information available already dynamically, especially for small systems, into the language of statistical mechanics? The answer to this question is two-fold. First, statistical mechanics furnish quantities (or descriptors) and tools of analysis that are complementary to those used in dynamics and that shed additional light on the systems and the phenomena studied. Second, the tools and concepts of the new statistical mechanics are applicable to and practical for systems of all sizes, therefore, they allow for a uniform analysis and characterization of the size-evolution of systems' properties and phenomena as the systems grow from very small to very large, where the dynamical description becomes impractical. For more details on all the issues discussed in this section, including examples of applications and an extension to the quantum DOS, we refer the reader to Ref. 7.

"Chromosome test" for metallicity and universality in the size-driven evolution towards bulk polarizability of metals

One of the consequences of the creation and rapid development of the field of nanoscience is a considerable broadening of the scope of fundamental questions and issues that traditionally belonged to the realm of condensed matter and solid-state physics, as well as their modern incarnation known as materials science. The classification of chemical elements into types of materials, such as insulators, semiconductors and conductors (the latter being largely, but not exclusively, represented by metals), is based on the properties and characteristics they exhibit in bulk quantities. However, the features of finite-size aggregates of the very same elements in the form of their atomic clusters – especially those in the small and medium size range – are, as a rule, very different from the corresponding features in the bulk limit. For example, metal clusters over a certain size range do not possess any characteristics normally associated with the bulk metallic state. These characteristics then grow in as the clusters grow in size.

How does the size-driven evolution to the fully developed metallic state take place? Is it the same or different in different metallic elements? How "early" in the course of the evolution can one determine whether a cluster of an unknown element will "develop" into a metal or a nonmetal? The way these questions are formulated may bring to mind a possible analogy to the processes involved in the time-driven transformation of a fertilized egg into a fully developed fetus. In this transformation, an evolving embryo goes through a sequence of

well-defined stages, each associated with a certain time after fertilization. These stages and the corresponding to them times are the same for all members of a given biological species. Using a chromosome test, the biological gender of a future newborn human can be determined as early as 6 weeks after the fertilization of the egg.

One can use various descriptors to distinguish between metals and nonmetals and to gauge the size-induced transition to metallicity; in the transition, the state may be deemed to be already metallic by one descriptor, but not necessarily by others. We employ here as a descriptor the response to an external electric field. The response in nonmetals is polarization (i.e., reorientation of the local dipole moments) the net result of which is a reduction of the field in the interior of a nonmetal. The response in metals is charge transfer, or separation, that results in the complete expulsion of the field from the interior of a metal.

To analyze and characterize the size-driven evolution to metallicity, we use the property of the total polarizability α_{ij} of the system,

$$\alpha_{ij} = \frac{d\mu_i}{dF_j}\Big|_{F=0}, \quad i,j = x,y,z, \tag{16}$$

where μ_i are the Cartesian components of the system total dipole moment $\boldsymbol{\mu}$ and F_j are the Cartesian components of a uniform external electric field $\boldsymbol{F}$. The μ_i can be decomposed as follows [8] (see Fig. 3)

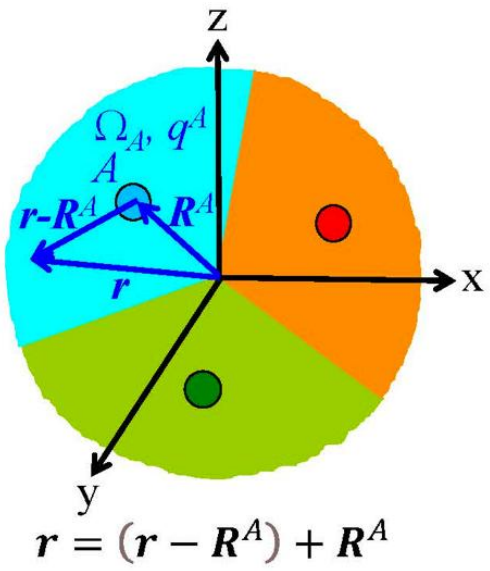


Figure 3. Schematic of decomposition of a finite system into atomic contributions: atomic volumes Ω_A (indicated by different colors) and atomic charges $\boldsymbol{q}^A$. Shown also is the decomposition of the space vector $\boldsymbol{r}$ into the sum of vectors $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^A$ and $\boldsymbol{R}^A$, where $\boldsymbol{R}^A$ defines the location of the nucleus of atom A (see the text for details).

$$\mu_i = \int r_i \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \sum_A \int_{\Omega_A} r_i \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \mu_i^p + \mu_i^q \quad , \tag{17}$$

where

$$\mu_i^p = \sum_A \int_{\Omega_A} \left(r_i - R_i^A \right) \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} \tag{18}$$

and

$$\mu_i^q = \sum_A \int_{\Omega_A} R_i^A \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \sum_A R_i^A \int_{\Omega_A} \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \sum_A R_i^A q^A \quad . \tag{19}$$

In Eqs. (17-19), $\rho(\boldsymbol{r})$ is the total charge density of the system that includes the positive point charges of the nuclei, Ω_A is the volume of space associated with atom A, R_i^A are the Cartesian components of vector $\boldsymbol{R}^A$ that defines the location of the nucleus of atom A, and q^A is the charge associated with atom A. Equation (17) decomposes the components μ_i of the total dipole moment into what we call the local, or dipole, part μ_i^p, Eq. (18), and charge transfer part μ_i^q, Eq. (19). Atoms whose charge q^A is zero do not contribute to μ_i^q.

Substitution of Eq. (17) into Eq. (16) leads to decomposition of the total polarizability α_{ij} into the corresponding local, or dipole, part α_{ij}^p and charge transfer part α_{ij}^q,

$$\alpha_{ij}^p = \frac{d\mu_i^p}{dF_j}\Big|_{F=0} \qquad \text{and} \qquad \alpha_{ij}^q = \frac{d\mu_i^q}{dF_j}\Big|_{F=0} . \tag{20}$$

The dipole part α_{ij}^p of the total polarizability can be viewed as a measure of a nonmetallic type of response of the system to an external electric field, whereas the charge transfer part α_{ij}^q serves as a measure of a metallic type of response. In the analysis we use the rotationally invariant directionally averaged quantities

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii} , \qquad \langle \alpha^p \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii}^p \qquad \text{and} \qquad \langle \alpha^q \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii}^q \quad . \tag{21}$$

Figure 4 shows the graphs of $\langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha^p \rangle$ and $\langle \alpha^q \rangle$ on the per-atom basis calculated for clusters of Na, K, Al and Zn ranging in size from 2 to 146 atoms. This choice of elements was made to include different types of metals: Na and K represent alkali metals, Al – *sp*-type metals and Zn – transition metals. The calculations were performed using density functional theory (DFT); the details of the computational framework and those on the structures of the clusters used in the calculations can be found in Ref. 9. Examination of the figure points to common features in the size-evolution of $\langle \alpha \rangle / N$, $\langle \alpha^p \rangle / N$ and $\langle \alpha \rangle^q / N$ for all four elements. The total polarizability $\langle \alpha \rangle / N$ exhibits an overall, albeit not necessarily monotonic, decrease

with the increase of cluster size; the dipole part $\langle\alpha^p\rangle/N$ decreases monotonically; and the charge transfer part $\langle\alpha^q\rangle/N$ shows an initial rapid increase with some oscillatory behavior (these oscillations are reflected in the total polarizability $\langle\alpha\rangle/N$ as well), which is then followed by a "saturation" leveling off. The finding that all four metallic elements are characterized by the leveling off of their $\langle\alpha^q\rangle/N$ values, which starts at the very small size of about 20-25 atoms, is particularly interesting; our test calculations indicate that such a leveling off does not happen in nonmetallic elements. But what is even more remarkable is the realization that the saturation value of $\langle\alpha^q\rangle/N$ for each of the four metallic elements considered agrees with the corresponding value of the bulk polarizability of the metal. We conjecture that this behavior is common for all metallic elements, and it means that they carry their metallic identity from the very small sizes where their properties are vastly different from those in their corresponding bulk metallic state.

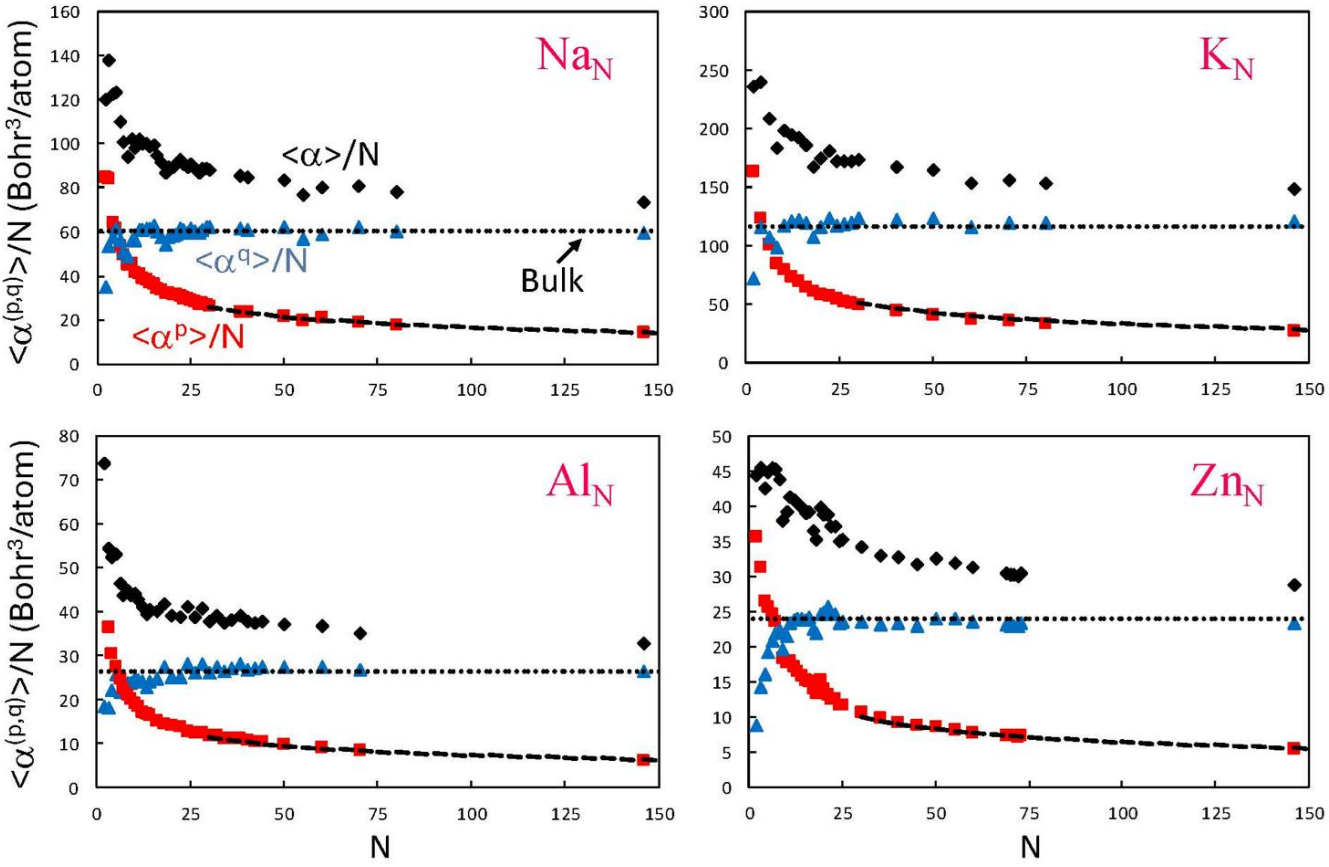


Figure 4. DFT-calculated values of the total polarizability per atom $\langle\alpha\rangle/N$ and its dipole $\langle\alpha^p\rangle/N$ and charge transfer $\langle\alpha^q\rangle/N$ parts for Na_N, K_N, Al_N and Zn_N clusters. The dotted lines indicate the corresponding bulk polarizabilities. The dashed lines are graphs of Eq. (28) with $\zeta = 0.39$ (see the text for details).

The reason they do not qualify as metals in the small and medium size range is the presence of the dipole part $\langle\alpha^p\rangle/N$ in $\langle\alpha\rangle/N$. As $N \to \infty$, $\langle\alpha^p\rangle/N \to 0$ and the systems become fully developed metals as gauged by their polarizability $\langle\alpha\rangle/N$. Consequently, the size-dependent behavior of the $\langle\alpha^q\rangle/N$ part of the total polarizability $\langle\alpha\rangle/N$ of a cluster of an unknown

element over a limited size range just above 20-25 atoms can serve as a "chromosome test" for identification of the element as metallic or nonmetallic. If $\langle\alpha^q\rangle/N$ levels off and remains constant in this size range, the element is metallic; if it changes, the element is nonmetallic. Moreover, if the element is identified as metallic, one can determine its exact chemical identity (name) by matching the leveled off value of its $\langle\alpha^q\rangle/N$ with a value in the table of the bulk polarizabilities of metals.

We pose now the following question: Do the polarizabilities of clusters of different metallic elements evolve with the size of the clusters to the corresponding bulk polarizabilities in a similar or different way? To quantify the metallic character of a cluster, we introduce a measure we call degree of metallicity d_m,

$$d_m = \frac{\langle\alpha^q\rangle}{\langle\alpha\rangle} = 1 - \frac{\langle\alpha^p\rangle}{\langle\alpha\rangle}. \tag{22}$$

The value of $d_m = 1$ corresponds to the state of fully developed metallicity as gauged by the polarizability. The graphs of the d_m calculated for clusters of Na, K, Al and Zn, over the size range where their $\langle\alpha^q\rangle/N$ values are leveled off, are shown in Fig. 5. Even though the magnitudes of $\langle\alpha\rangle$, $\langle\alpha^p\rangle$ and $\langle\alpha^q\rangle$ are quite different for these four elements (cf. Fig. 4), their d_m values can be viewed – taking into account their numerical origin – as essentially the same. This surprising at first sight finding can be understood in terms of the following simple model.

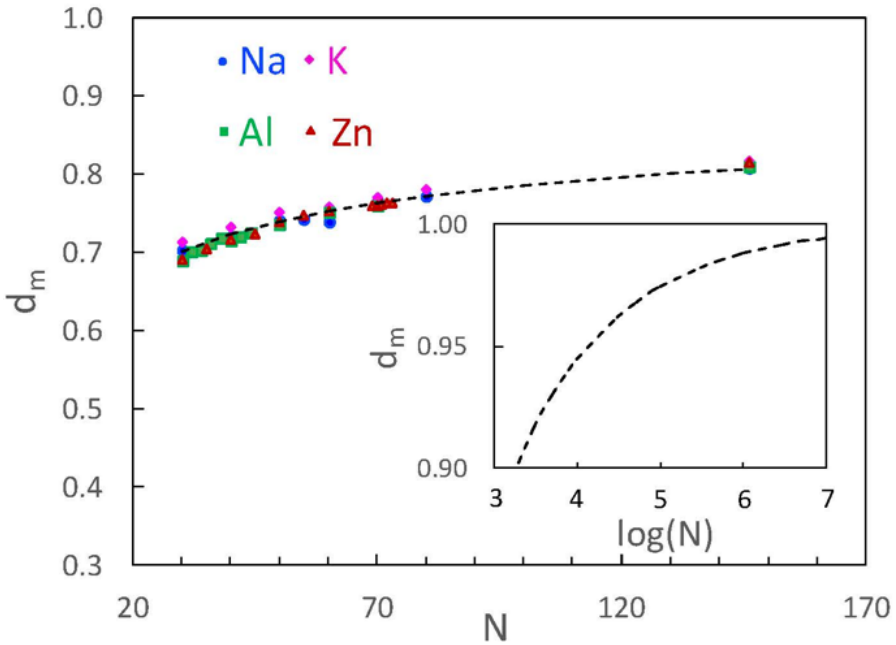


Figure 5. DFT-calculated degree of metallicity d_m as a function of cluster size for Na_N, K_N, Al_N and Zn_N. The dashed line is the graph of Eq. (30) with $\zeta = 0.39$. The inset shows the graph of Eq. (31) with $\zeta = 0.39$ and illustrates the rate of asymptotic convergence of d_m to 1.

The total polarizability $\langle\alpha\rangle$ of a metallic sphere of radius R is defined by

$$\langle\alpha\rangle = (R + \delta)^3 , \tag{23}$$

where δ is the spillover parameter that accounts for the spatial extension of the electronic charge density beyond the boundary of the sphere (see, e.g., Ref. 10 and the citations therein). Equation (23) can be rewritten on the per-atom basis as

$$\langle\alpha\rangle/N = R^3/N + 3R^2\delta/N + 3R\delta^2/N + \delta^3/N. \quad (24)$$

For a large sphere (bulk limit, $R >> \delta$), the last three terms in the right-hand-side of Eq. (24) can be neglected. That identifies the first term R^3/N as

$$R^3/N = \langle\alpha\rangle/N\,|_{R>>\delta} = \alpha_0\ , \quad (25)$$

where α_0 is the (per-atom) bulk polarizability. For clusters, except those of the smallest sizes, it translates into $R^3/N = \langle\alpha^q\rangle/N$ (cf. the discussion above). Therefore, for clusters, the last three terms in Eq. (24) constitute $\langle\alpha^p\rangle/N$,

$$\langle\alpha^p\rangle/N = 3R^2\delta/N + 3R\delta^2/N + \delta^3/N\ . \quad (26)$$

Substitution of $R = \sqrt[3]{\alpha_0 N}$ [cf. Eq. (25)] into Eq. (26) gives

$$\langle\alpha^p\rangle/N = 3\alpha_0^{2/3}\delta N^{-1/3} + 3\alpha_0^{1/3}\delta^2 N^{-2/3} + \delta^3 N^{-1} \quad (27)$$

or, alternatively,

$$\frac{\langle\alpha^p\rangle}{N} = \alpha_0\left(3\zeta N^{-\frac{1}{3}} + 3\zeta^2 N^{-\frac{2}{3}} + \zeta^3 N^{-1}\right), \quad (28)$$

where $\zeta \equiv \delta\alpha_0^{-1/3}$. Taking into account Eqs. (25) and (28), Eq. (24) can be rewritten as

$$\langle\alpha\rangle/N = \alpha_0(1 + 3\zeta N^{-1/3} + 3\zeta^2 N^{-2/3} + \zeta^3 N^{-1}). \quad (29)$$

Finally, substitution of Eqs. (28) and (29) into Eq. (22) leads to the following expression for the degree of metallicity

$$d_m = \frac{1}{1+3\zeta N^{-1/3}+3\zeta^2 N^{-2/3}+\zeta^3 N^{-1}}, \quad (30)$$

or in the limit of large N ,

$$d_m \approx 1 - 3\zeta N^{-1/3}. \quad (31)$$

Prompted by the fact that the DFT-calculated d_m values for the four different elements are essentially the same over a range of sizes (cf. Fig. 5), we conjecture that ζ is a universal constant common for all metallic elements. Its value can be obtained by fitting Eq. (30) to the calculated d_m data. Fitting to the data averaged over all four metals for each cluster size gives the value of $\zeta = 0.39$ (for further details we refer the reader to Ref. 9). Since it is obtained from numerical data, the value 0.39 should be viewed as a close estimate. The exact value of ζ can be expected to follow from future analytical developments. The universality of ζ makes Eq. (30), as well as Eqs. (28) and (29), also universal. The universality of the latter two equations is in that they allow for calculation of the total polarizability and its dipole part for any cluster of any metallic element directly from the corresponding bulk polarizability of the metal using the same for all elements size-dependent factors $(1 + 3\zeta N^{-1/3} + 3\zeta^2 N^{-2/3} + \zeta^3 N^{-1})$ and $(3\zeta N^{-1/3} + 3\zeta^2 N^{-2/3} + \zeta^3 N^{-1})$, respectively. Among other things, this allows one to bypass the need in repeating the costly DFT calculations for each cluster size separately.

The two fundamental outcomes here are the existence of a "chromosome test" for metallicity (or nonmetallicity) of an element, and the universality exhibited by all metallic elements in their size-driven evolution to the bulk metallic state as gauged by the polarizability (see a caveat in Ref. 9). Both suggest a remarkable similarity with the common aspects ("universality") that characterize(s) the evolution of a developing embryo and fetus in all members of a given biological species.

Closing note

In this contribution, we discussed three subjects as examples of the ubiquitous nature of fundamental issues in physics. Such issues permeate all areas of physics, new and old, "exotic" and more traditional. Their persistence reflects the continuous evolution of our physical picture of reality and the unending quest for its deeper understanding. Both will continue in perpetuity.

Acknowledgments

I thank Prof. D. Aleinikava, Dr. A. Goldberg and Prof. K. A. Jackson for the collaboration on the subjects discussed in this contribution. The work at Argonne (JJ) was supported by the Office of Basic Energy Sciences, Division of Chemical Sciences, Geosciences and Biosciences, U.S. Department of Energy under Contract No. DE-AC02-06CH11357. This research used the resources of the National Energy Research Scientific Computing Center (NERSC) supported by the Office of Science of the U.S. DOE under Contract No. DE-AC02-05CH11231.

REFERENCES

1. E.M. Pearson, T. Halicioglu and W.A. Tiller. Laplace-transform technique for deriving thermodynamic equations from the classical microcanonical ensemble // Phys. Rev. A – 1985. – V. 32. – P. 3030-3039.
2. J. Jellinek, A. Goldberg. On the temperature, equipartition, degrees of freedom, and finite size effects: Application to aluminum clusters // J. Chem. Phys. – 2000. – V. 113. – P. 2570-2582.
3. R.S. Berry, T.L. Beck, H.L. Davis and J. Jellinek. Solid-liquid phase behavior in microclusters, In: Evolution of Size Effects in Chemical Dynamics, Part 2, Ed. by I. Prigogine and S.A. Rice // Adv. Chem.Phys. – 1988. – V. 70. P. 75-138.
4. D. Aleinikava, J. Jellinek. Analysis of dynamical peculiarities in nanoalloys at subsystems level: Dynamical degrees of freedom, temperature differences, and the chameleon effect // ChemPhysChem – 2023. – V. 24, e202300184 (1-15).
5. A.I. Khinchin. Mathematical Foundations of Statistical Mechanics (Dover, New York, 1949).
6. R.G. Gilbert, S.C. Smith. Theory of Unimolecular and Recombination Reactions (Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1990).
7. J. Jellinek, D. Aleinikava. Anharmonic densities of states: A general dynamics-based

solution // J. Chem.Phys. – 2016. – V. 144,214193(1-12).
8. K. Jackson, M. Yang and J. Jellinek. Site-specific analysis of dielectric properties of finite systems // J. Phys. Chem. C – 2007. – V. 111. P. 17952-17960.
9. J. Jellinek, K.A. Jackson. Universality in size-driven evolution towards bulk polarizability of metals. // Nanoscale – 2018. – V. 10. P. 17534-17539.
10. W.A. de Heer. The physics of simple metal clusters: experimental aspects and simple models // Rev. Mod.Phys. – 1993. – V. 65. P. 611-676.

Ю. Єллінек
Argonne National Laboratory,
Lemont, Illinois 60439, USA
e-mail: jellinek@anl.gov

У ПОШУКАХ РІШЕНЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ПРОБЛЕМ У ФІЗИЦІ

Пошук рішень фундаментальних проблем у фізиці та прагнення до все глибшого розуміння її фундаментальних концепцій — це зусилля, які ніколи не вичерпаються. Вони поширюються на всі галузі фізики та охоплюють системи та явища як нові, так і старі. Цей внесок представляє та обговорює три предмети фундаментального інтересу в тому, що можна розглядати як більш традиційні галузі фізики.

Ключові слова: температура, ступені свободи, ергодичність, ангармонічність, наносистеми, поляризовність, універсальність.

О.М. Гаврилик, А.В. Назаренко
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
вул. Метрологічна, 14-б, Київ, 03143, Україна
e-mail: omgavr@bitp.kyiv.ua, nazarenko@bitp.kyiv.ua

ПРО СПЕЦИФІКУ НЕЛІНІЙНИХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ НА ДІЙСНИХ МНОГОВИДАХ ШТІФЕЛЯ

Для квазідвомірної нелінійної сигма-моделі на дійсних многовидах Штіфеля з узагальненою (анізотропною) метрикою отримано рівняння двозарядної ренормгрупи (РГ) в однопетлевому наближенні для параметрів гомотетії і анізотропії метрики. Для перенормування метрики введено нормальні координати і тензор кривини. Досліджено траєкторії РГ і встановлено наявність нерухомої точки, спільної для чотирьох критичних ліній (тетракритична точка) в загальному випадку чи її відсутність у випадку абелевої структурної групи.
Ключові слова: сигма-модель; многовид Штіфеля; бета-функції; тетракритична точка

Вступ

Із добре відомими дійсними грасмановими многовидами $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^N)$ тісно пов'язані [1] такі їх розширення як дійсні многовиди Штіфеля $V_k(\mathbb{R}^N)$. А саме, останні є ніщо інше як головні розшарування із базою в грасманіані $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^N)$ і структурною групою $SO(k)$. Нас цікавлять (квазі)двомірні сигма-моделі – нелінійні польові моделі зі значеннями у штіфелевих і, зокрема, грасманових многовидах. Зазначимо, що квантові властивості грасманових сигма-моделей досить добре вивчені: у двомірному випадку таким нелінійним моделям властива асимптотична свобода [2,3], а якщо перейти до розмірності $d = 2 + \varepsilon$, то моделі мають двофазну структуру з бікритичною точкою [4]. Така поведінка, разом із застосуванням методу реплік та реплічної границі, дозволила опис [5] (де)локалізації електронів у невпорядкованих системах (чи випадковому потенціалі) [6]. Що стосується класичних двомірних грасманових моделей, то для цих нелінійних польових моделей була доведена їх інтегровність [7].

Принципово інші властивості мають нелінійні сигма-моделі на дійсних многовидах Штіфеля, як у класичному розгляді, так і в квантовому [8,9], як для $d = 2$, так і $d = 2 + \varepsilon$. Зокрема, на відміну від однозарядної ренормгрупової (скейлінгової) поведінки грасманових сигма-моделей, класу $V_k(\mathbb{R}^N)$-сигма-моделей властива двозарядна поведінка, а питання про наявність в них, при $d = 2$, асимптотичної свободи стає цілком нетривіальним [8,9]. Через це, а також і у зв'язку з недавнім поверненням інтересу [10,11] до геометрії та інших властивостей многовидів Штіфеля, ми зосередимося на особливих властивостях нелінійної сигма-моделі в $d = 2 + \varepsilon$ евклідових вимірах з функціоналом дії $\mathcal{A}$ і лагранжіаном $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{T}\int \mathcal{L}\, \mathrm{d}^d x, \qquad \mathcal{L} = \mathrm{Tr}[\boldsymbol{\nabla} U^{\top} \boldsymbol{\nabla} U + (\lambda - 1)\boldsymbol{\nabla} U^{\top} U U^{\top} \boldsymbol{\nabla} U], \tag{1}$$

де T – температура; поле $U(x) \in V_k(\mathbb{R}^N)$, де многовид Штіфеля $V_k(\mathbb{R}^N) = SO(N)/SO(N-k)$; градієнт $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_d)$; параметр $\lambda > 0$.

Деякі характеристики многовиду Штіфеля

Дійсним многовидом Штіфеля $V_k(\mathbb{R}^N)$ є множина усіх k-реперів, утворена наборами з ортонормованих векторів у просторі $\mathbb{R}^N$. Довільне $U \in V_k(\mathbb{R}^N)$, яке задається $N \times k$-матрицею, задовольняє умову ортогональності: $U^{\top} U = I_k$, де I_k – одинична $k \times k$-матриця, а $\top$ означає транспонування. На таких многовидах група $SO(N)$ діє транзитивно, як група *ізометрій*. Група *ізотропії*, яка діє на "початкову точку" $\mathcal{O} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$, складається з матриць виду $\mathrm{diag}(I_k, H)$, де $H \in SO(N-k)$.

Це дозволяє ототожнити многовид $V_k(\mathbb{R}^N)$ із факторпростором $SO(N)/SO(N-k)$ з розмірністю $\dim V_k(\mathbb{R}^N) = Nk - k(k+1)/2$. Таким чином, $V_k(\mathbb{R}^N)$ означено як підмноговид простору $\mathbb{R}^{N\times k}$. Зокрема $V_1(\mathbb{R}) = \{1,-1\}$; $V_1(\mathbb{R}^N) = S^{N-1}$ – $(N-1)$-мірна сфера; $V_N(\mathbb{R}^N) = O(N)$; $V_{N-1}(\mathbb{R}^N) = SO(N)$; $V_2(\mathbb{R}^4)$ – перший нетривіальний випадок.

Дотичний простір. Нехай $\mathcal{TM}$ – дотичний простір для $\mathcal{M} = V_k(\mathbb{R}^N)$. Будемо вимагати, щоб кожен дотичний вектор $\xi \in \mathcal{T}_U\mathcal{M}$ в точці $U \in \mathcal{M}$ належав до *горизонтального* підпростору, тобто має таку структуру [10,11,12]:

$$\xi = U\omega_\xi + F_\xi, \tag{2}$$
$$\omega_\xi = \frac{1}{2}(U^\top\xi - \xi^\top U) \in \mathfrak{o}(k), \qquad F_\xi = \Pi\xi,$$

де проектор $\Pi = I_N - UU^\top$, і $\omega_\xi^\top = -\omega_\xi$. Оскільки ω_ξ має $k(k-1)/2$ незалежних компонент, а F_ξ – $(N-k)k$, то в сумі відтворюється $\dim V_k(\mathbb{R}^N)$. З іншого боку, симетрична складова $(U^\top\xi + \xi^\top U)/2$ належить *вертикальному* підпростору, який включає "прискорення".

Дотичні вектори можна задати в огортуючій алгебрі $\mathfrak{so}(N)$, базисом якої слугують $N(N-1)/2$ кососиметричних $N\times N$-матриць X_A:

$$X_A = \left\|(X_A)_{b,c}\right\| = \left\|\delta_{b,a_1}\delta_{c,a_2} - \delta_{b,a_2}\delta_{c,a_1}\right\|, \tag{3}$$

де мультиіндекс $A = (a_1, a_2)$ складається з двох таких, що $1 \le a_1, a_2 \le N$. Матриця X_A має лише два відмінних від нуля елементи, 1 і -1, в позиціях (a_1, a_2) і (a_2, a_1), так що $X_A^\top = -X_A$ і $\mathrm{Tr}\,(X_A^\top X_A) = 2$. Базисні елементи алгебри $\mathfrak{so}(N)$ задовольняють комутаційні співвідношення:

$$[X_A, X_B] = f_{A,B}^C X_C, \tag{4}$$
$$f_{A,B}^C = \delta_{a_1,b_1}\delta_{a_2}^{c_1}\delta_{b_2}^{c_2} + \delta_{a_2,b_2}\delta_{a_1}^{c_1}\delta_{b_1}^{c_2} - \delta_{a_2,b_1}\delta_{a_1}^{c_1}\delta_{b_2}^{c_2} - \delta_{a_1,b_2}\delta_{a_2}^{c_1}\delta_{b_1}^{c_2}.$$

У цьому базисі *ортонормована* метрика $g(X,Y) = -\mathcal{B}(X,Y)/[2(N-2)]$ на основі бі-інваріантної форми Кіллінга $\mathcal{B}(X,Y)$, коли $\mathcal{B}(X_A, X_B) = f_{A,C}^D f_{B,D}^C$, збігається з метрикою Фробеніуса, природною в описі σ-моделі (1):

$$\langle X_A, X_B\rangle_F = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(X_A^\top X_B) = \delta_{AB}. \tag{5}$$

Тоді норма вектора $\xi \in \mathcal{TM}$ запишеться як $\|\xi\|_F^2 = (1/2)\mathrm{Tr}(\xi^\top\xi)$.

Для розкладу ω- і F-компонент дотичних векторів у введеному базисі, означимо X_P і X_Q з $P = (p,q)$ і $Q = (j,p)$, де $1 \le p,q \le k$ і $k+1 \le j \le N$. Хоча $F \in \mathbb{R}^{N\times k}$ в (2), але ця складова векторів зазвичай входить у значущі вирази у вигляді комбінації $F^\top F \in \mathbb{R}^{k\times k}$, запис якої здійснюється за допомогою добутку $X_{Q_1}^\top X_{Q_2}$ і згортки за індексом $j_1 = j_2$.

Метрика. Коваріантну метрику $\mathrm{g}(U;\lambda)$ (метричний оператор) моделі (1) та її дію на дотичний вектор $\xi \in \mathcal{T}_U\mathcal{M}$ означимо так:

$$\mathrm{g}\xi = \xi + (\lambda - 1)UU^\top\xi, \qquad \mathrm{g}^{-1}\xi = \xi + (\lambda^{-1} - 1)UU^\top\xi. \tag{6}$$

Зауважимо, що випадок $\lambda = 1/2$ в літературі називають *канонічним* [12,13].

Тоді скалярний добуток двох дотичних векторів $\xi, \eta \in \mathcal{T}_U\mathcal{M}$ позначимо як

$$\langle\xi,\eta\rangle_{\mathrm{g}} = \mathrm{Tr}[\xi^\top\eta + (\lambda-1)\xi^\top UU^\top\eta]. \tag{7}$$

Оскільки $\langle\xi,\xi\rangle_{\mathrm{g}} = \mathrm{Tr}(\lambda\omega_\xi^\top\omega_\xi + F_\xi^\top F_\xi)$, згідно з (2), то і лагранжіан з (1) є

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}(\lambda\boldsymbol{\omega}_u^\top\boldsymbol{\omega}_u + \boldsymbol{F}_u^\top\boldsymbol{F}_u). \tag{8}$$

Тут ми використовуємо таке представлення для дотичного вектора $\boldsymbol{\nabla}U$:

$$\boldsymbol{\nabla}U = U\boldsymbol{\omega}_u + \boldsymbol{F}_u, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{\omega}_u = U^\top\boldsymbol{\nabla}U, \qquad \boldsymbol{F}_u = \Pi\boldsymbol{\nabla}U,$$

оскільки $0 = \boldsymbol{\nabla}U^\top U + U^\top\boldsymbol{\nabla}U$ через в'язь $U^\top U = I_k$.

Вираз (8) вказує на наявність двох ω- і F-підсистем. Умову $U^\top U = I_k$ можна легко задовольнити, редукуючи систему до $\boldsymbol{\omega}_u \neq 0$ і $\boldsymbol{F}_u = 0$, тобто до $O(k)$-моделі. Якщо $\boldsymbol{\omega}_u$ виражається через складові $\boldsymbol{F}_u \neq 0$, одержується модель на грасмановому многовиді $SO(N)/SO(N-k)\times SO(k)$. Однак, тут ми зацікавлені у врахуванні обидвох підсистем з повним числом ступенів вільності $\dim V_k(\mathbb{R}^N)$.

Лінійна зв'язність і нормальні координати. Розглянемо допоміжну задачу одномірної еволюції, яка генерується функціоналом дії

$$S = \int \left\{ \mathrm{Tr}\left[\dot U^\top \dot U + (\lambda-1)\dot U^\top U U^\top \dot U\right] + \mathrm{Tr}[H(U^\top U - I_k)] \right\} \mathrm{d}t, \tag{10}$$

де $H^\top = H \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – множник Лагранжа; $\dot U = \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$.

За допомогою варіювання $U(t)$ і H, а також низки тотожностей, одержується множник $H = -\dot U^\top \dot U + 2(\lambda-1)(U^\top \dot U)^2$ і рівняння геодезичної [10]:

$$\ddot U + \Gamma\left(\dot U, \dot U\right) = 0. \tag{11}$$

Для запису останнього вжито отриманий вираз для функції Крістофеля (символ *другого роду*), яка задає лінійну зв’язність в точці $U \in \mathcal{M}$:

$$\Gamma(\xi,\eta) = \frac{1}{2} U(\xi^\top \eta + \eta^\top \xi) + (1-\lambda)\Pi(\xi\eta^\top + \eta\xi^\top)U. \tag{12}$$

Тепер подамо розв’язок рівняння (11) у вигляді ряду за t в термінах початкових даних $U(0) = U_0$ і $\dot U(0) = V$, які пов’язані співвідношенням $U_0^\top V + V^\top U_0 = 0$. Маємо

$$U(t) = U_0 + tV - \frac{t^2}{2!}\Gamma_0(V,V) - \frac{t^3}{3!}\Gamma_0(V,V,V) - \cdots, \tag{13}$$

де $\Gamma_0(V,V) = \Gamma(V,V)|_{U=U_0}$, а $\Gamma_0(V,V,V) = \mathrm{D}_V\Gamma(V,V) - 2\Gamma(V,\Gamma(V,V))|_{U=U_0}$ залучає похідну D_V в точці $U \in \mathcal{M}$ за напрямом $V \in \mathcal{TM}$, яка діє, зокрема, так:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\phi\Gamma(\xi,\eta) \;=& \frac{1}{2}\phi(\xi^\top\eta + \eta^\top\xi) - (1-\lambda)(\phi U^\top + U\phi^\top)(\xi\eta^\top + \eta\xi^\top) \\ &+ (1-\lambda)\Pi(\xi\eta^\top + \eta\xi^\top)\phi. \end{aligned} \tag{14}$$

Зауважимо, що розклади (2) і (9) можна вжити *після* обчислення такої похідної.

Легко переконатися в наближенні t^2, що $I_k = U^\top U = U_0^\top U_0$. Таким чином, покладаючи $t = 1$, дві точки $U, U_0 \in \mathcal{M}$ пов’язуються співвідношенням (13). Відновлюючи залежність U і V від координат x, формула (13) узагальнює “зсув поля” $U = U_0 + V$ в евклідовому просторі, коли $U, U_0, V \in \mathbb{R}^{\dim\mathcal{M}}$. Отже, фіксуючи U_0, змінні $V \in \mathcal{TM}$ називають *нормальними* координатами, які надалі описують квантові флуктуації в σ-моделі.

Кривина. Задамо тензор кривини $R(\xi,\eta)\phi$ в (1,3)-формі для $\xi,\eta,\phi \in \mathcal{TM}$ [11]:

$$R(\xi,\eta)\phi = \mathrm{D}_\eta\Gamma(\xi,\phi) - \mathrm{D}_\xi\Gamma(\eta,\phi) + \Gamma\left(\eta,\Gamma(\xi,\phi)\right) - \Gamma\left(\xi,\Gamma(\eta,\phi)\right). \tag{15}$$

Обчислимо діагональні компоненти тензора кривини $R(\xi,\eta)\xi$, використовуючи розклад $R(\xi,\eta)\xi = U(U^\top R(\xi,\eta)\xi) + \Pi R(\xi,\eta)\xi$:

$$\begin{aligned} U^\top R(\xi,\eta)\xi =& -\frac{1}{4}\left(\omega_\eta\omega_\xi^2 - 2\omega_\xi\omega_\eta\omega_\xi + \omega_\xi^2\omega_\eta\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\omega_\eta F_\xi^\top F_\xi + F_\xi^\top F_\xi\omega_\eta\right) \\ &+ \frac{3-4\lambda}{4}\left(\omega_\xi F_\xi^\top F_\eta + F_\eta^\top F_\xi\omega_\xi\right) - \frac{3-2\lambda}{4}\left(\omega_\xi F_\eta^\top F_\xi + F_\xi^\top F_\eta\omega_\xi\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Pi R(\xi,\eta)\xi =& -\lambda\frac{3-4\lambda}{2}F_\xi\omega_\xi\omega_\eta + \lambda\frac{3-2\lambda}{2}F_\xi\omega_\eta\omega_\xi - \lambda^2 F_\eta\omega_\xi^2 + F_\eta F_\xi^\top F_\xi \\ &+ \frac{2-3\lambda}{2}F_\xi F_\xi^\top F_\eta - \frac{4-3\lambda}{2}F_\xi F_\eta^\top F_\xi. \end{aligned} \tag{17}$$

Біквадратична форма $\widetilde K(\xi,\eta) = \langle R(\xi,\eta)\xi,\eta\rangle_{\mathrm{g}}$, яка визначає секційну кривину, після підставлення виразів (16) і (17) записується так:

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(\xi,\eta) = \frac{\lambda}{2}\left\|[\omega_\xi,\omega_\eta]\right\|_F^2 + \left\|F_\eta F_\xi^\top - F_\xi F_\eta^\top\right\|_F^2 + \frac{2-3\lambda}{2}\left\|F_\eta^\top F_\xi - F_\xi^\top F_\eta\right\|_F^2 \\ + 2\lambda^2\left(\left\|F_\eta\omega_\xi\right\|_F^2 + \left\|F_\xi\omega_\eta\right\|_F^2\right) + 2\lambda(3-4\lambda)\langle F_\xi\omega_\xi, F_\eta\omega_\eta\rangle_F \\ - 2\lambda(3-2\lambda)\langle F_\xi\omega_\eta, F_\eta\omega_\xi\rangle_F.\end{aligned} \tag{18}$$

Аналогічна формула отримана в роботі ([14], ст. 405) в термінах прямокутних $(N-k)\times k$-матриць, скажімо M, замість $F\in\mathbb{R}^{N\times k}$. Однак, це не принципово, тому що M і F входять у вигляді комбінацій $M^\top M$ і $F^\top F$, які належать $\mathbb{R}^{k\times k}$.

Використовуючи (16) і (17), за допомогою згортки $(1,3)$-кривини можна отримати вигляд діагональних компонент $(0,2)$-тензора Річчі [11]:

$$\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = \left[\lambda^2(N-k) + \frac{k-2}{4}\right]\mathrm{Tr}\left(\omega_\xi^\top\omega_\xi\right) + [N-2-\lambda(k-1)]\,\mathrm{Tr}\left(F_\xi^\top F_\xi\right). \tag{19}$$

Видно, що коефіцієнти кривини є сталими через однорідність многовиду Штіфеля (див. [9]). Ми обговоримо зв'язок між $\widetilde{K}$ і Ric при перенормуванні σ-моделі.

Формалізм фонового поля

Вважатимемо, що лагранжіан σ-моделі $\mathcal{L}[U_0] = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\nabla}U_0^\top \mathrm{g}_0 \boldsymbol{\nabla}U_0)$ визначається затравочною метрикою $\mathrm{g}_0 = \mathrm{g}(U_0;\lambda)$, відмінною від $\mathrm{g} = \mathrm{g}(U;\lambda)$ контрчленами h:

$$\mathrm{g} = \mu^\varepsilon \mathrm{g}_0 + \mathrm{h}, \tag{20}$$

де $\varepsilon = d-2$ – параметр перенормування; μ – масштаб перенормування.

Саме це перенормування є нашою головною метою, хоча поля також підлягають перенормуванню. Ми пристосовуємо відому техніку (див. [15,16]) до моделі на многовиді Штіфеля. Спершу забезпечимо коварінтний опис, переходячи до нормальних координат.

Ефективний лагранжіан. Введемо інтерполююче поле $\Phi(x,s)$ і величини, подібні до означених раніше:

$$\Phi(x,0) = U_0(x), \qquad \left.\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = V(x), \qquad \Phi(x,1) = U(x). \tag{21}$$

Розвинемо лаґранжіан $\mathcal{L}[U]$ в ряд за параметром s:

$$\mathcal{L}[U] \equiv \mathcal{L}[\Phi(x,1)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\mathcal{L}[\Phi(x,s)]}{\partial s^n}\right|_{s=0}, \tag{22}$$

використовуючи коваріантну похідну $\widehat{\nabla}_s$ вздовж геодезичної $\Phi(x,s)$, а також $\widehat{\boldsymbol{\nabla}}$:

$$\widehat{\nabla}_s\xi = \frac{\partial\xi}{\partial s} + \Gamma\left(\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s},\xi\right), \qquad \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\xi = \boldsymbol{\nabla}\xi + \Gamma(\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,s),\xi), \tag{23}$$

де функція Крістофеля $\Gamma(\xi,\eta)$ з (12) береться при $U=\Phi(x,s)$.

Користуючись розкладом дотичних векторів на ω- і F-компоненти, знаходимо:

$$\frac{\partial\mathcal{L}[\Phi(x,s)]}{\partial s} = 2\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi^\top \mathrm{g}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right), \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}[\Phi(x,s)]}{\partial s^2} = \mathrm{Tr}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^\top \mathrm{g}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right] + \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi^\top \mathrm{g}[\widehat{\nabla}_s,\widehat{\boldsymbol{\nabla}}]\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right), \tag{25}$$

враховуючи, що

$$\widehat{\nabla}_s\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s} = 0, \tag{26}$$

$$\widehat{\nabla}_s\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,s) = \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s} = \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s} + \Gamma\left(\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s},\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,s)\right), \tag{27}$$

$$\left[\widehat{\nabla}_s,\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\right]\xi = R\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,s),\frac{\partial\Phi(x,s)}{\partial s}\right)\xi, \tag{28}$$

де кривина $R(\xi,\eta)\phi$ задається формулою (15).

В *однопетлевому* наближенні обмежимось лагранжіаном, квадратичним за V:

$$\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}[U_0] + 2\langle \boldsymbol{\nabla} U_0, \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V\rangle_{\mathrm{g}_0} + \langle \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V, \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V\rangle_{\mathrm{g}_0} + \langle \boldsymbol{\nabla} U_0, R(\boldsymbol{\nabla} U_0, V)V\rangle_{\mathrm{g}_0}, \tag{29}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\nabla}} V = \boldsymbol{\nabla} V + \Gamma_0(\boldsymbol{\nabla} U_0, V)$, а $\langle \boldsymbol{\nabla} U_0, R(\boldsymbol{\nabla} U_0, V)V\rangle_{\mathrm{g}_0} = -\widetilde{K}(\boldsymbol{\nabla} U_0, V)$ за означенням. Якщо $U_0(x)$ є розв'язком рівнянь руху, доданок $\langle \boldsymbol{\nabla} U_0, \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V\rangle_{\mathrm{g}_0}$ не дає внеску в інтеграл дії. Так як вираз (29) є загальним для σ-моделей в даному наближенні, зробимо наступний крок, спільний для них.

Замінимо V на $\mathcal{V}$, щоб перетворити $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\nabla} V^{\mathsf{T}} \mathrm{g}_0 \boldsymbol{\nabla} V)$ на $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\nabla} \mathcal{V}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nabla} \mathcal{V})$. Для цього покладемо $V = \tilde{e}\mathcal{V}$, де $\tilde{e} = \mathrm{g}(U_0; \lambda^{-1/2})$. Тоді $\tilde{e}^2 = \mathrm{g}_0^{-1}$ і $\tilde{e}^{\mathsf{T}} \mathrm{g}_0 \tilde{e} = I_N$, а зв'язок між складовими дотичних векторів V і $\mathcal{V}$ є таким:

$$V = U_0\omega_{\mathcal{V}} + F_V, \qquad \mathcal{V} = U_0\omega_{\mathcal{V}} + F_V, \qquad \omega_{\mathcal{V}} = \lambda^{1/2}\omega_V. \tag{30}$$

Після введення $\omega_{\mathcal{V}}$ замість ω_V, квадратична за V частина лагранжіану набуває вигляду

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \langle \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V, \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V\rangle_{\mathrm{g}_0} - \widetilde{K}(\boldsymbol{\nabla} U_0, \tilde{e}\mathcal{V}), \tag{31}$$

$$\langle \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V, \widehat{\boldsymbol{\nabla}} V\rangle_{\mathrm{g}_0} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\nabla}\omega_{\mathcal{V}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nabla}\omega_{\mathcal{V}} + \boldsymbol{\nabla} F_V^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nabla} F_V) + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}, \tag{32}$$

де перший доданок в (32) відповідає за вільну еволюцію флуктуацій і визначає функції Гріна.

Квантування. Отже, при квантуванні моделі ми вважаємо $U_0(x)$ фоновим полем, а $\omega_{\mathcal{V}}$ і F_V – флуктуюючими величинами. Роль констант взаємодії виконують компоненти метрики g, які , звертаючись до функціоналу дії (1), включають додатні параметри T і λ. У фізичних застосуваннях σ-моделей для опису локалізації Андерсона, температуру T часто об'єднують з коефіцієнтом провідності, який підлягає перенормуванню. З іншого боку, параметр λ входить в лагранжіан (8) як змінний масштабний фактор (анізотропія).

Для квантування вводиться функціональний інтеграл за *швидкозмінними* полями $\omega_{\mathcal{V}}$ і F_V (з джерелом), який обчислюється як ряд за діаграмами Фейнмана. В розглядуваному випадку усі вирази відповідають однопетлевому наближенню. Як зазвичай, при усередненні виразів працює теорема Віка для спарювання полів одного сорту, що дозволяє обмежитись врахуванням лише парних членів. В принципі, слід також задіяти інтеграл за *повільною* складовою $U_0(x)$, яка є неоднозначною. Однак, тут ми опускаємо ці відомі формули.

Означимо функції Гріна полів:

$$[\![\omega_{\mathcal{V}}^{P_1}(x)\omega_{\mathcal{V}}^{P_2}(y)]\!] = \pi_{P_1P_2}\Delta(x-y), \quad [\![F_V^{Q_1}(x)F_V^{Q_2}(y)]\!] = \delta_{Q_1Q_2}\Delta(x-y), \tag{33}$$

де дужки $[\![\ldots]\!]$ позначають квантове середнє у вакуумному стані; а компоненти матричного поля F_V з мультиіндексами $Q_n = (j_n, p_n)$, де $1 \le p_n \le k$ і $k+1 \le j_n \le N$, обрано в якості незалежних. Окрім того, символ $\delta_{Q_1Q_2} = \delta_{j_1j_2}\delta_{p_1p_2}$, і символ

$$\pi_{P_1P_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{p_1p_2}\delta_{q_1q_2} - \delta_{p_1q_2}\delta_{q_1p_2}\right) \tag{34}$$

для мультиіндексів $P_n = (p_n, q_n)$, $1 \le p_n, q_n \le k$, а їх згортка дає число ступенів вільності.

Просторово-залежна складова задається виразом

$$\Delta(x-y) = T\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2}\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}, \tag{35}$$

який випливає з (32).

Бета-функції параметрів

Через вигляд (35), при усереднені локальних виразів моделі виникає інфрачервона (ІЧ) розбіжність, яку можна пом'якшити, вводячи *регулятор* у вигляді маси поля $\mathcal{V}$. Позначимо площу одиничної сфери в d-вимірах як $\Omega_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$, тоді при $\varepsilon = d - 2 \to 0$ маємо

$$\Delta(0) = T\frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mu} k^{d-3}\mathrm{d}k = -\frac{T}{2\pi\varepsilon} - \frac{T}{2\pi}\ln\mu + O(\varepsilon). \tag{36}$$

При чому ультрафіолетові (УФ) розбіжності усуваються стандартним чином для σ-моделей.

Перенормування метрики в однопетлевому наближенні зумовлене внеском:

$$\int [\![\widetilde{K}(\boldsymbol{\nabla}U_0, \tilde{e}\mathcal{V})]\!]\mathrm{d}^d x = \int \mathrm{Ric}(\boldsymbol{\nabla}U_0, \boldsymbol{\nabla}U_0)\Delta(0)\mathrm{d}^d x. \tag{37}$$

Ідея доведення формули (37) грунтується на рівності квантового середнього від $\widetilde{K}$ за полями $\omega_{\mathcal{V}}$ і F_V і середнього за матрицями, коли $\boldsymbol{\nabla}U_0 = U_0\boldsymbol{\omega}_u + \boldsymbol{F}_u$. Тобто, завдяки однорідності многовиду Штіфеля, можна перенести обчислення у "початок" $\mathcal{O}$ і використати базис (3). Тоді, слід зробити заміну $\omega_{\mathcal{V}}^P \to X_P$, $F_V^Q \to \Pi_{\mathcal{O}}X_Q$ (коефіцієнти "поглинаються" Δ), також записати $\boldsymbol{\nabla}U_0$ в базисі (3), і підсумувати за Q і незалежними P. При усередненні $\widetilde{K}(\boldsymbol{\nabla}U_0, \tilde{e}\mathcal{V})$ "виживають" лише доданки, квадратичні за $\omega_{\mathcal{V}}$ і F_V, і одержується

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(\boldsymbol{\nabla}U_0, \boldsymbol{\nabla}U_0)\\ &\quad= \left[\lambda^2(N-k) + \frac{k-2}{4}\right]\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\omega}_u^\top\boldsymbol{\omega}_u) + [N-2-\lambda(k-1)]\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{F}_u^\top\boldsymbol{F}_u).\end{aligned} \tag{38}$$

Розбіжність (37) при $\varepsilon \to 0$ усувається введенням факторів Z_{g} для компонент метрики:

$$Z_{\mathrm{g}_\omega}\frac{\lambda}{T}\delta_{P_1P_2}, \qquad Z_{\mathrm{g}_F}\frac{1}{T}\delta_{Q_1Q_2}. \tag{39}$$

Згідно з (29), (36) і (38), отримуємо

$$Z_{\mathrm{g}_\omega} = 1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\left[\lambda^2(N-k) + \frac{k-2}{4}\right], \qquad Z_{\mathrm{g}_F} = 1 - \frac{t}{\varepsilon}[N-2-\lambda(k-1)], \tag{40}$$

де ми ввели $t = T/(2\pi)$ і $\tau = T/(2\pi\lambda)$.

Внесок $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ з (32) потребує окремого обговорення, на якому ми тут не зупиняємося. Лише зауважимо, що розбіжності в $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ не впливають на перенормуванні метрики [17].

Бета-функції. За означенням бета-функцій $\beta_t = \mathrm{d}t/\mathrm{d}s$ і $\beta_\tau = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s$ для $s = \ln\mu$, і за допомогою виразів

$$\beta_t = \frac{\varepsilon t}{1 - t\,\mathrm{d}\ln Z_{\mathrm{g}_F}/\mathrm{d}t}, \qquad \beta_\tau = \frac{\varepsilon\tau}{1 - \tau\,\mathrm{d}\ln Z_{\mathrm{g}_\omega}/\mathrm{d}\tau}, \tag{41}$$

в однопетлевому наближенні отримуємо:

$$\beta_t = \varepsilon t - [N-2-\lambda(k-1)]t^2, \qquad \beta_\tau = \varepsilon\tau - \left[\lambda^2(N-k) + \frac{k-2}{4}\right]\tau^2. \tag{42}$$

Знайдемо $\beta_\lambda = \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}s$, використовуючи (42) і співвідношення:

$$\frac{\beta_\lambda}{\lambda} = \frac{\beta_t}{t} - \frac{\beta_\tau}{\tau}. \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\beta_\lambda &= t\left[\lambda^2(N-1) - \lambda(N-2) + \frac{k-2}{4}\right]\\ &= t(N-1)(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-);\end{aligned} \tag{44}$$

$$\lambda_\pm = \frac{N-2}{2(N-1)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(k-2)(N-1)}{(N-2)^2}}\right]. \tag{45}$$

Областю допустимих значень параметрів моделі в площині $(\lambda; t)$ є квадрант з $\lambda > 0$ і $t > 0$. Ця область ділиться на три сепаратрисами – прямими $(\lambda_-; t)$ і $(\lambda_+; t)$ для довільних $t > 0$. Нерухомі точки знаходимо з умов $\beta_t = 0$ і $\beta_\lambda = 0$. Вводячи

$$t_\pm = \frac{\varepsilon}{N - 2 - \lambda_+(k-1)}, \qquad (46)$$

маємо: $(0; 0)$ – гаусова точка; $(\lambda_-; t_-)$ – вузол; $(\lambda_+; t_+)$ – сідло (див. рис. 1).

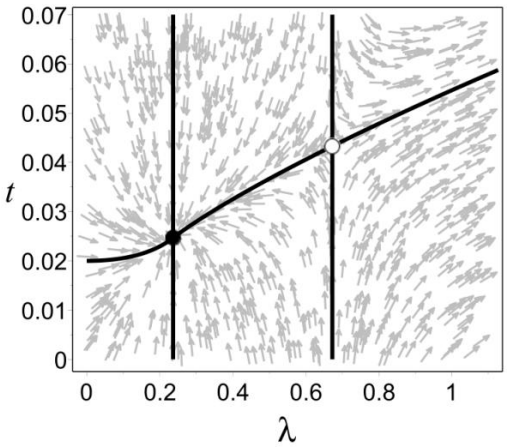


Рис. 1. Типові фази моделі. Тут *N*=12, *k*=9 та *d*=2.2. Сірі стрілки – поле швидкостей. Чорний кружечок позначає вузол, білий – сідло.

Траєкторії ренормалізаційної групи (РГ) задаються рівняннями:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \varepsilon t - [N - 2 - \lambda(k-1)]t^2, \qquad t(0) = t_0, \qquad (47)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} = t(N-1)(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-), \qquad \lambda(0) = \lambda_0. \qquad (48)$$

За їх допомогою (чисельно) одержується сепаратриса на рис. 1, яка проходить через точки $(0; \varepsilon/(N-2))$, $(\lambda_-; t_-)$ і $(\lambda_+; t_+)$. Видно, що у випадку $2 < k < N$ і $d > 2$, точка $(\lambda_-; t_-)$, в якій сходяться чотири фази, є тетракритичною. Зауважимо, що при $k = 2$ тетракритичність зникає, і точка $(\lambda_-; t_-) = (0; \varepsilon/(N-2))$ стає бікритичною.

Висновки

В даній роботі, стартуючи із польового лагранжіана для $(2+\varepsilon)$-мірної нелінійної сигма-моделі на дійсному многовиді Штіфеля, у квантовому розгляді ми застосували метод фонового поля і нормальні координати та отримали ренормгруповий опис перенормованої моделі в термінах двох ефективних (залежних від скейлінгового параметра) зарядів. Цей результат повністю підтвердив відповідні формули для бета-функцій і властивості ренормгрупової поведінки досліджуваної моделі, раніше отриманих застосуванням чисто геометричного підходу до загального випадку матричної бета-функції нелінійної моделі на довільному ріманову многовиді. Особлива тетракритична поведінка – наявність тетракритичної точки, спільної для чотирьох фаз, потребує подальшого детального дослідження кожної з цих фаз та відповідних критичних індексів. Не менш цікавим є і наступне застосування розглянутої моделі до опису властивостей реальних фізичних систем, зокрема до проблеми можливого співіснування та взаємовпливу явища (де)локалізації в квазідвомірній електронній системі і явища надпровідності, а також інших систем із двома незалежними параметрами порядку. Отримані результати можуть також бути корисними з точки зору дослідження нових класів універсальності у фізиці (мульти) критичних явищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Д. Хьюзмоллер. Расслоенные пространства (Мир, Москва, 1970).
2. A.M. Polyakov. Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields // Phys. Lett. B. – 1975. – V. 59. – P. 79.
3. A. McKane, M. Stone. Non-linear σ models: A perturbative approach to symmetry restoration // Nucl. Phys. B. – 1980. – V. 163. – P. 169.

4. S. Hikami. Renormalization group functions of orthogonal and symplectic non-linear σ model // Prog. Theor. Phys. – 1980. – V. 64(4). – P. 1466-1469.
5. A. Houghton, A. Jevicki, R.D. Kenway, A.M.M. Pruisken. Noncompact σ models and the existence of a mobility edge in disordered electronic systems near two dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 45(5). – P. 394-397.
6. E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, T.V. Ramakishnan. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – P. 673.
7. V.E. Zakharov, A.M. Mikhailov. Relativistically invariant two-dimensional models in field theory integrable by the inverse problem technique // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1978. – V. 74(6). – P. 1953.
8. A.M. Gavrilik. Self-interaction anisotropy of Stiefel systems of Goldstonions // Mod. Phys. Lett. A – 1989. –V. 4(18). – P. 1783-1788.
9. А.М. Гаврилик. Геометрия в нелинейных квантовополевых моделях на многообразиях Штифеля и бифуркации ассоциированных автономных систем // Укр. Мат. Журн. – 1991. – Т. 43(11). – С. 1527-1537.
10. K. Hüper, I. Markina, F.S. Leite. A Lagrangian approach to extremal curves on Stiefel manifolds // J. Geom. Mech. – 2021. – V. 13(1). – P. 55-72.
11. D. Nguyen. Curvatures of Stiefel manifolds with deformation metrics // J. Lie Theory. – 2022. – V. 32(2). – P. 563-600.
12. A. Edelman, T.A. Arias, S.T. Smith. The geometry of algorithms with orthogonality constraints // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1998. – V. 20(2). – P. 303-353.
13. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии, т. I, II (Наука, Москва, 1981).
14. G.R. Jensen. Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians // Duke Math. J. –1975. – V. 42. – P. 397-407.
15. L. Alvarez-Gaumé, D. Freedman, S. Mukhi. The background field method and the ultraviolet structure of the supersymmetric nonlinear σ-model // Ann. Phys. –1981. – V. 134. – P. 85-109.
16. P.S. Howe, G. Papadopoulos, K.S. Stelle. The background field method and the non-linear σ-model // Nucl. Phys. B. – 1988. – V. 296(1). – P. 26-48.
17. E. Braaten, T.L. Curtright, C.K. Zachos. Torsion and geometrostasis in nonlinear sigma models // Nucl. Phys. B. – 1985. – V. 260. – P. 630-688.

A.M. Gavrilik, A.V. Nazarenko
Bogolyubov Institute for theoretical physics of NAS of Ukraine
14-b, Metrolohichna str., Kyiv, 03143, Ukraine
e-mail: omgavr@bitp.kyiv.ua, nazarenko@bitp.kyiv.ua

ON THE SPECIFICITY OF NONLINEAR SIGMA-MODELS ON REAL STIEFEL MANIFOLDS

For a quasi-two-dimensional nonlinear sigma model on real Stiefel manifolds with a generalized (anisotropic) metric, the equations of a two-charged renormalization group (RG) in a one-loop approximation for the parameters of the homothety and anisotropy of the metric are obtained. Normal coordinates and a curvature tensor are introduced for the renormalization of the metric. The RG trajectories are investigated and the presence of a fixed point common to four critical lines (tetracritical point) in the general case or its absence in the case of an Abelian structural group is established.
Keywords: sigma-model; Stiefel manifold; beta-functions; tetracritical point

E.S. Kryachko[1], E.Yu. Remeta[2]
[1] Bogolyubov Institute for Theoretical Physics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
e-mail: e_kryachko@yahoo.com
[2] Institute of Electron Physics NAS of Ukraine, Uzhhorod, Ukraine.
e-mail: remetoveyu@gmail.com

ON EXISTENCE OF THE PRE-FRAGMENTATION BONDING OF AMINO ACIDS UNDER IONIZING RADIATION: ALANINE, GLYCINE, THREONINE, AND VALINE[1]

The topic of dissociative ionization (or fragmentation following ionization) of biomolecules, in particular such genetic macromolecules as DNA (deoxyribonucleic acid) and RNA (ribonucleic acid), is by no means new. It is definitely close to the circle of non-scientists, ordinary people, especially in the 21st century when gadgets and a variety of medical equipment fill our daily lives. It is this topic – we opine – and its consequences, including cancer, that is part of that "catastrophic chasm" that exists between the two cultures, which were written about by C. Snow in "The Two Cultures" and P. Feyerabend in "Farewell to Reason" (see also Ref. [1]). No matter how paradoxically – merely, as a 'chasm' due to fragmentation of genetic macromolecules – it sounds, but this work made us still to think about the topic after it was written and accepted for publication [2]: ask anyone – a rare work deserves such a fate. And this is not surprising: usually the work is written in such a way as to put an end to a problem or topic. Actually, a bold point.
Key words: dissociative ionization, biomolecules, potential energy surface

Introduction

Let us remind that the present topic is about the effect of ionizing radiation on biomolecules, precisely on amino acids. The former is a term used for the radiation (α-, γ-, X-rays, protons, and heavy ions) that result in a number of destructive changes: molecular excitation, dissociative excitation, and, primarily, ionization (i.e. removing electrons, cationization [3]), and dissociative ionization, via the interaction (impact) with the secondary electrons produced at the cell or biomolecular level in considerable amounts with energies ranging from the lower to dozens of eV under this radiation. By themselves, mechanisms behind each of these changes are of a complex nature.

Amino acids are organic compounds that contain both acids and amino groups. All of them, with the exception of glycine, have L- and D-isomers. Amino acids that exist in proteins of humans and animals are in the L-form, in contrast to a number of D-isomeric amino acids found in bacteria.

Is the reason of the mentioned paradox a mistake or delusion? To answer this question, we consider two experimental scenarios within the so called "scientific method" [4]. Let explain the latter.

By definition, the physical objects (phenomena) could only be inferred from observations performed by an observer. Define now the term ‘observable’ as the observer who has an ability to observe, or as the observer who equipped by the method of observation, the scientific method, that determine the properties of what is observed. Kant defines this transition from observation to observable as follows: “There is no doubt whatever that all our

[1] Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Yu.M. Lomsadze.

cognition begins with experience, for how else should the cognitive faculty be awakened into exercise if not through objects that stimulate our senses and in part themselves produce representations, in part bring the activity of our understanding into motion to compare these, to connect or separate them, and thus in work up the raw material of sensible impressions into a cognition of objects that is called experience? As far as time is concerned, then, no cognition in us precedes experience, and with experience every cognition begins." ([5], p.136[2]), whereas Feynman introduces the intermediate phase: "Observation, reason, and experiment"[3] ([6], p. 2-2). Within quantum mechanics, this refers to a measuring experiment, or merely a measurement. The latter inverses the above order: observation follows a measuring experiment. The paradigm of measurement is inherent to the whole building of physics [7]. permeates the entire essence of quantum mechanics where Yu.M. Lomsadze's works [8-16] made an undeniable contribution.

One is the real experiment that reflects the aforementioned mechanisms underlying the changes that occur in amino acids under ionizing radiation and including ionization and its dissociative kind. The experiment's description is the following [17] (see also [18]): two beams of electrons and biomolecules cross each other and interact (via electron impact). As a result, positive ions of biomolecules are observed. Their production cross sections for both the initial molecule and its fragments are then measured. The energy dependencies of all products are determined.

The other, a computer, "thought experiment" (Gedankenexperiment) [19] on the ionization of threonine (Thr) $C_4H_9NO_3$ was carried out in [2] where we observe a fragmentation[4] under ionizing radiation and deduce its origin which we systematically study in-depth. For this purpose, we, instead of routine usage of the concept of the Dyson orbitals, employ the typical, chemically sound molecular orbitals, MOs (of Kohn-Sham type).

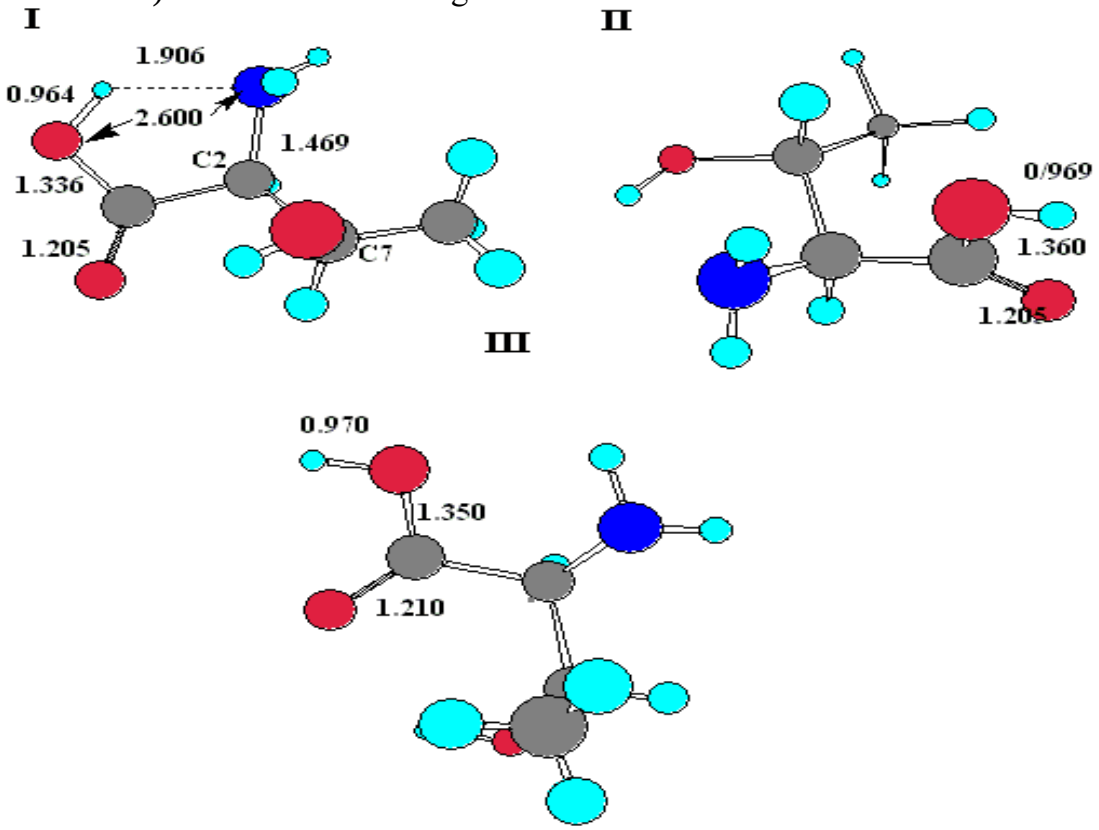
The concept of ionization is complex and difficult for understanding depending on the system being ionized – be it an atom or a molecule, for example – and on the mechanism of ionization. The latter we treat in this work as the process of interaction (impact) of a molecule with secondary electron(s) whose energy is of several hundred eV. It is also assumed that the aforementioned secondary electrons play a key role in these interactions: they apparently interact with the outer, loosely bound, electrons of the amino acid filling its *h*ighly *o*ccupied *m*olecular *o*rbital (HOMO) and possibly further, HOMO-1, HOMO-2, etc. These secondary electrons coulombically push the latter out of HOMO, and so on, and if the HOMO is responsible for a bond, it weakens or cleaves, causing fragmentation of the amino acid at that bond. We also note that secondary electrons may have enough energy to simultaneously, and not sequentially, interact with the HOMO-1, HOMO-2 electrons, etc., with their characteristic cross sections probabilities. Moreover, the binding energies of HOMO, HOMO-1, HOMO-2, etc. electrons are equal to the ionization thresholds of their MO – they are small and grow gradually.

[2] On p.716 [5], Kant defines experience as "perception with rules". Later, he defines experience as "the agreement of perceptions (of empirical representations) to the cognition of an object".
[3] Within quantum mechanics, this refers to a measuring experiment.
[4] We bestow a word '*fragmentation*' two meanings: one is a real fragmentation when a system under consideration is partitioned into two or more subsystems separated from
each other by an infinity distance (dissociation), and the other is a so called *'pre-fragmentation bonding*' (or "fragmentation cleavage") when a molecule under study is
partially dissociated and the product species are formed via a so called bond. In the thought experiment given below a relative stability of this bond is supported by the barrier, shown in Fig. 1 for III_0^+ that separated (2) from (1) and that is placed by 17.66 kcal·mol^{-1} above it (Fig. 1).

Results of the calculations

On the lower-energy portion, say within ~3 kcal·mol^{-1}, of the ground-state potential energy surface (PES) of the neutral L-threonine, we determine, at the computational level composing of the hybrid Becke-3-parameter-Lee-Yang-Parr (B3LYP) density functional theory in junction with the Pople's 6-311++G(d,p) basis set, three noteworthy structures I - III of the low-energy conformers I - III of L-threonine (see Scheme below).

The lowest-energy neutral conformer is I, whose higher stability is perhaps due to the hydrogen bonding C-O-H···NH_2. To verify this suggestion, let consider the rotational isomer of I (or *cis*-I, Fig.1) and denote it as *trans*-I. The energy difference between them, C-O-H·and·NH_2, amounts to 2.6 kcal·mol^{-1}. Neglecting a possible and rather weak H-bonding between *trans*-O-H group and C=O in COOH, one can characterize the above H-bond C-O-H···NH_2 in I by the frequency shift $\Delta\nu$ = -286 cm^{-1} (i.e. red shift) and Δr(O-H) = -0.006 Å (bond contraction) with the H-bond length R = 1.906 Å.



Scheme. Three structures of the low-energy conformers of L-threonine. **I** is placed at the bottom of our PES, **II** and **III** are 1.08 and 3.31 kcal·mol^{-1}, correspondingly, above it.

Let now ionize these conformers I - III. One of their scenarios of ionization, ionization of I, - or ionization paths – is shown in Fig. 2.

Notice that the PESs of ionization of I and III compose of two stable[5] conformers, I_0^+ and I_1^+, III_0^+ and III_1^+, respectively, where I_0^+ and III_0^+ are placed energetically below I_1^+ and III_1^+: besides on the cationic PES of threonine III_0^+ lies 0.025 kcal·mol^{-1} lower I_0^+, contrary to the neutral one (Fig.1). All these conformers are composed of fragments of fractionally charged $C_2H_5NO_2$ and C_2H_4O as follows (looking ahead see also Fig.3):

[5] All their modes are characterized by positive frequencies.

(i) $I_0^+ = [C_2H_5NO_2]^{+0.} @@ [C_2H_4O]^{+0.}$
$I_1^+ = [C_2H_5NO_2]^{+0.93} @ [C_2H_4O]^{+0.07}$; (1)

and

(ii) $III_0^+ = [C_2H_5NO_2]^{+0.} @@ [C_2H_4O]^{+0.}$
$III_1^+ = [C_2H_5NO_2]^{+0.92} @ [C_2H_4O]^{+0.08}$; (2)

where the superscript charges are derived from the corresponding Mulliken charges, and where the sign @ is introduced, first, to indicate a charged hydrogen-like[6] bond.

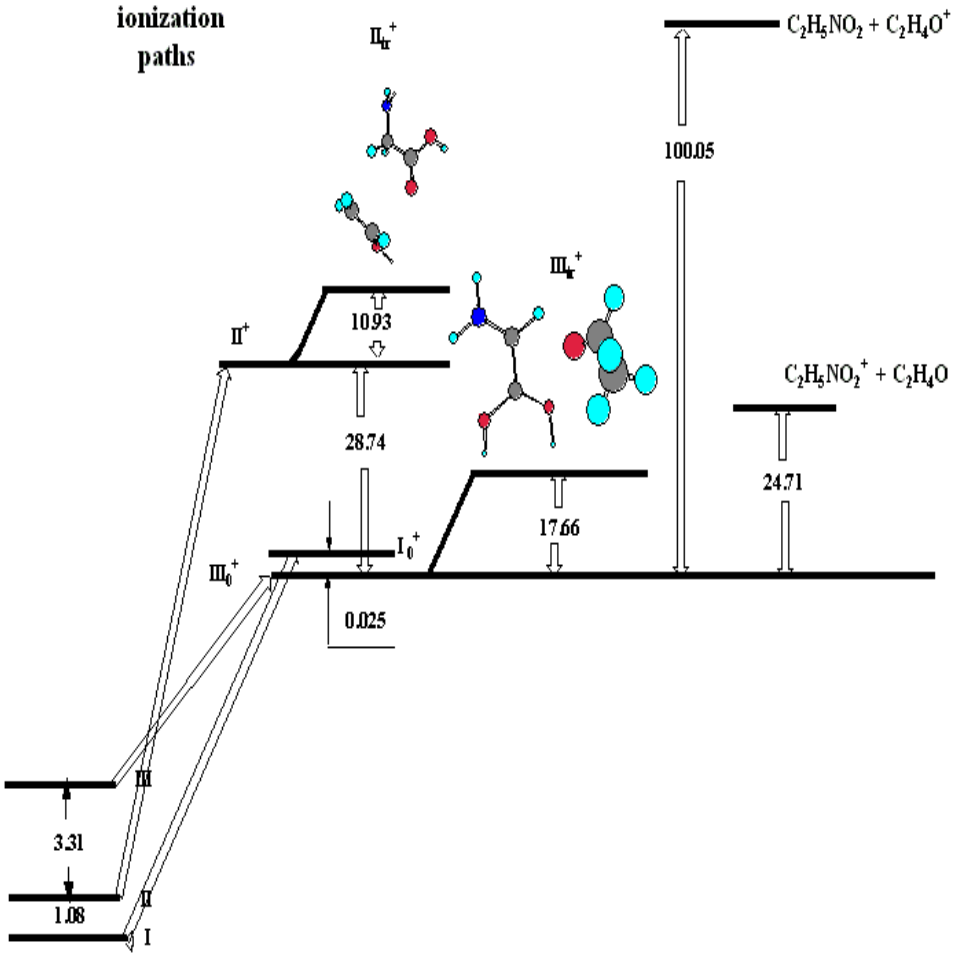


Figure 1. Energetic ordering of conformers I - III (l.h.s) and their cations (r.h.s). Energies in kcal·mol^{-1}.

[6] The difference between this bond and the hydrogen bond (hence the noun 'likeness') is the existence of Coulomb repulsion between all three components of the bond.

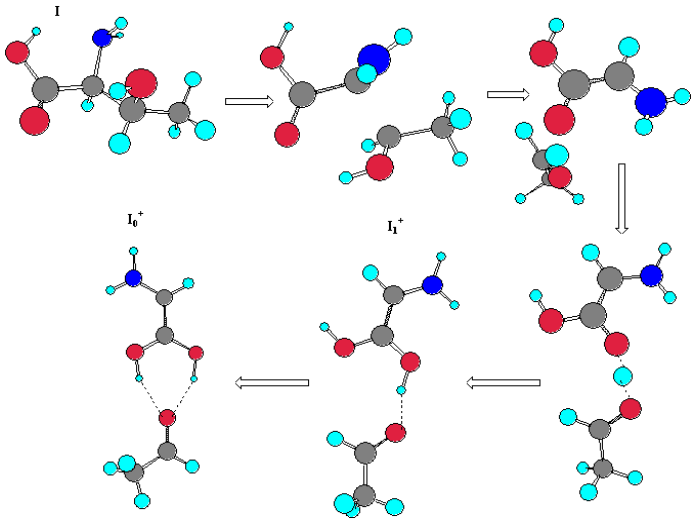


Figure 2. Scenario of ionization of the conformer I of L-threonine according to the aforementioned computational procedure. Ionization induces cleavage of the [C_α-C]-R bond.

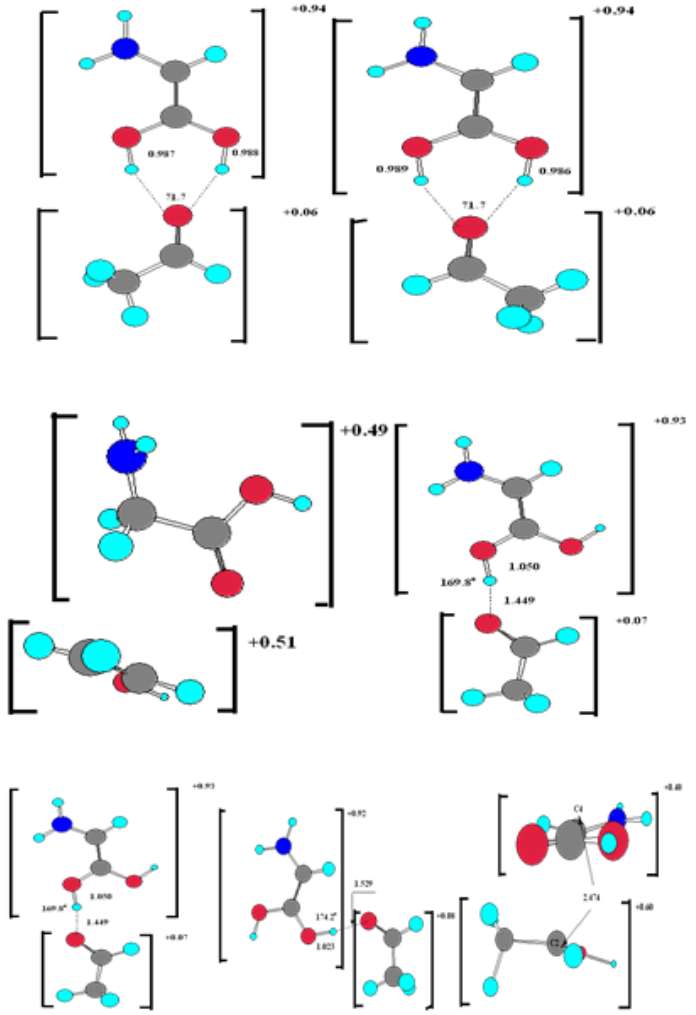


Figure 3. Fragmentation patterns of threonine cations: I_0^+ and III_0^+ (upper row); II_{tr}^+ and III_{tr}^+ (middle row); and I_1^+ and III_1^+, and III^+ (lower row).

Summarizing, physics behind ionization of threonine is the following. Up to now, it was believed that ionization and subsequent dissociative ionization of the aliphatic amino acids occur due to removal of one of the electrons from the lone-pair on the nitrogen via a very simple mechanism: free, secondary electron(s) initiated by ionizing radiation, deposit energy into the less bounded electron(s) or into the bond obviously occupying the outermost orbital HOMO and push them out (to infinity). We depict the HOMO of the studied threonine in Fig. 4. This leads to redistribution of charge within threonine.

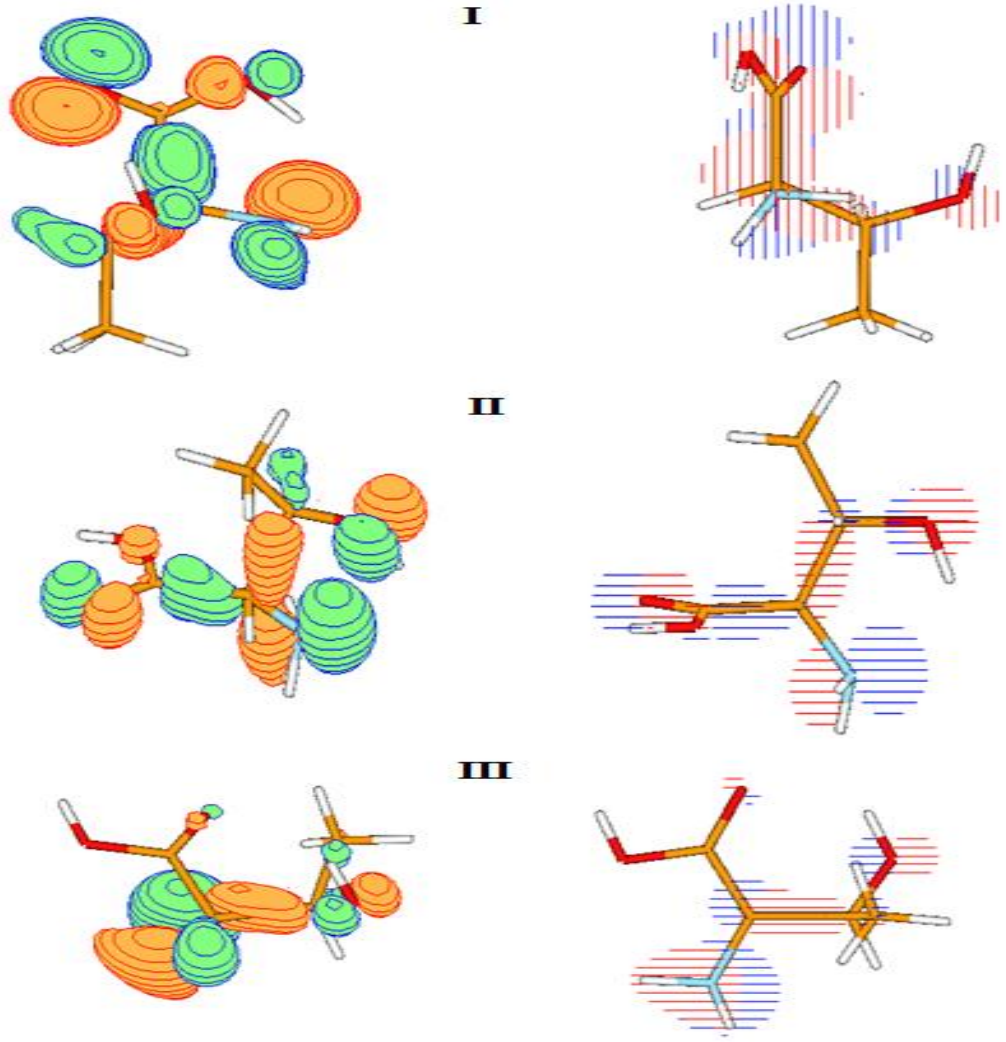


Figure 4. The HOMOs of the studied conformers I-III of L-threonine: the left panel is taken in the orbital mode; the right one in the molecular mode.

We conjecture that the secondary electron produced by ionizing radiation knocks out by Coulomb electron impact one of the less bound electrons of the amino acid that occupies a particular bonding MO – the so called *pre-fragmentatory bond* (see Fig.3, upper row). This bond weakly supports two positively charged fragments and thus keeps a weak quasi-stable balance (against Coulomb repulsion) between them. The latter breaks this balance through the transition state shown in Fig. 2. The ionized L-threonine thus fragments out.

Conclusion

By analogy with threonine, we observe the same scenario in the thought experiments with alanine and glycine molecules. However, valine amino acid behaves differently – a simple

lengthening of the bond rather its dissociation. Therefore, the present study has resurfaced the detailed mechanism of the dissociative ionization of some amino acids that was hidden in the aforementioned thought computational experiment. This experiment also hides the detailed mechanism of formation of anions of amino acids that may be produced under collision of amino acids with the secondary electrons. Formation of such anions has recently been discussed in our recent work [20]: they are definitely bound due to the Fermi-Teller theorem since total dipole moments of the studied amino acids exceeds 2.5 D. Altogether, these conclusions call into question that whether the mentioned beam experiment adequately describes the real picture of interactions of amino acids with ionizing radiation.

Acknowledgments

The present work which we treat as our posteriori thoughts of [2] was partially supported (to E.S.K., first author) by the Project of the Department of Physics and Astronomy of the National Academy of Sciences of Ukraine "Conformational mechanics of DNA macromolecule under Influence of biologically active molecules and ions" (0122U002279; priority theme 1230) and (to E.Yu.R., second author) by the Project of Fundamental Scientific Research Council of Ukraine (Grant DB-912 "Elementary processes of interaction of slow electrons and photons with many-electron atoms with open *p*- and *d*-shells").

REFERENCES

1. B. Russell. The Science to Save Us from Science[7] // The New York Times Magazine – Section SM – 1950. – March 19. – P. 3.

2. E.S. Kryachko, E.Yu. Remeta. An Improved Fragmentation Modeling of Amino Acids Under Ionizing Radiation. I. Threonine // In: Progress in Theoretical Chemistry and Physics, vol. 34. Eds. I. Grabowski, K. Slowik, J. Maruani, E.J. Brändas. Advances in Methods and Applications of Quantum Systems in Chemistry, Physics, and Biology. (Springer Nature, Cham, Switzerland, 2024), P.227-241.

3. M.A. Hill, R.L. Ullrich. Ionizing Radiation // In: Eds. Baan, R.A. et al. Tumor Site Coancordance and Mechanisms of Carcinogenesis. IARC Sci. Publ. No. 165. Lyon, Ch. 18 (2019).

4. K. Popper. Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge. (London and New York Basic Books, 1962).

5. I. Kant. Critique of Pure Reason. The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant. Eds. P. Guyer and A.W. Wood. (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1998).

6. R. Feynman, R. Leighton, M. Sands. The Feynman Lectures on Physics. (New Millenium Edition. Vol. I. Basic Books, N.Y., 2010).

7. H. Margenau. Philosophical Problems concerning the Meaning of Measurement in Physics // Philosophy of Science – 1958. – V. 25(1). – P. 23-33.

8. Yu.M. Lomsadze. Logic of Conclusive Explication of the quantum theory // Preprint ITP, ITF-70-61-E (1970).

[7] The complete title is "The Science to Save Us From Science; If we are to, attain a stable society we must understand people's minds, says a philosopher."

9. Yu.M. Lomsadze. Generalization of von Neumann's theorem to nonreproducible measurements in the framework of quantum field theory. I. // Soviet Physics Journal. – 1978. – V. 21(4). – P. 498-502.

10. Yu.M. Lomsadze. Generalization of the von Neumann theorem for irreducible measurements in the framework of the quantum field theory. 1. S-operator unitarity, standard probability, state vector // Izvestiya Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika (USSR). – 1978. – V. 21. – P. 4-9.

11. Yu.M. Lomsadze. Generalization of the von Neumann theorem for irreducible measurements within the framework of quantum field theory. 2. // Izvestiya Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika (USSR). – 1978. – V. 21. – P. 119-125.

12. Yu.M. Lomsadze. Generalization of von Neumann theorem to irreproducible measurements within framework of quantum field theory 3. // Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Fizika (USSR). – 1978. – V. 21., N11. – P. 85-91.

13. Yu.M. Lomsadze. Generalization of the von Neumann theorems to irreproducible measurements within quantum field theory. IV. // Soviet Physics Journal. – 1979. – V. 22(6). – P. 622-629.

14. Yu.M. Lomsadze. Generalization of von Neumann's theorem to irreproducible measurements within the framework of quantum field theory. V. // Soviet Physics Journal. – 1979. – 22(9). – P. 993-998.

15. Yu.M. Lomsadze. Fundamental philosophical problems of quantum theory // Vyisnik Akadem. Nauk Ukrainskoj RSR. – 1980. – P. 5-18.

16. Yu.M. Lomsadze., Sh.Yu. Lomsadze. Explanatory axiomatics of quantum theory: Resolution of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // Soviet Physics Journal. – 1982. – 25(2). – P. 92-96.

17. A.N. Zavilopulo, E.A. Mironets, A.S. Agafonova, An Upgraded Ion Source for a Mass Spectrometer // Instr Expt Techn. – 2012. – V. 55., N 1. – P. 65-71; A.N. Zavilopulo, O.B. Shpenik, A.N. Mylymko, V.Yu. Shpenik. Mass spectrometry of D-ribose molecules // Int J Mass Spectr. –2019. – V. 441, N 1. – P. 1-20.

18. I.I. Shafranyosh, M.I. Sukhoviya, M.I. Shafranyosh. Absolute cross sections of positive- and negative-ion production in electron collision with cytosine molecules // J Phys B: At Mol Opt Phys. – 2006. – V. 39. – P. 4155-4162.

19. E. Mach. On Thought Experiments. In: Knowledge and Error (translated by Thomas J. McCormack and Paul Foulkes). Dordrecht, Reidel, 1976. P. 134-147; R. Sorensen. Thought Experiments // Amer Scientist. – 1991. – V. 79., N 3. – P. 250-263; P. Feyerabend. Mach's Theory of Research and Its Relation to Einstein // Studies in History and Philosophy of Science. – 1984. – V. 15., N 1. – P. 1-22; E. Helms Ørsted, Mach, and the History of 'Thought Experiment' // Brit. J. of the History of Philosophy. – 2022. – V.30., N 5. – P. 837-858.

20. E.S. Kryachko. The Watson-Crick Rare Tautomer Hypothesis on Mutations and Reality // Biophys Bull. – 2020. – V. 43. – P. 121-132.

Є.С. Крячко[1], Є.Ю. Ремета[2]
[1] ІТФ імені М.М. Боголюбова НАН України, Київ, Україна.
e-mail: e_kryachko@yahoo.com
[2] ІЕФ НАН України, вул. Університет 21, 88017, Ужгород, Україна.
e-mail: remetoveyu@gmail.com

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРЕДФРАГМЕНТАЦІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ В АМІНОКИСЛОТАХ ПІД ДІЄЮ ІОНІЗУЮЧОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ: АЛАНІН, ГЛІЦИН, ТРЕОНІН І ВАЛІН

Тема дисоціативної іонізації (або фрагментації внаслідок іонізації) біомолекул, зокрема таких генетичних макромолекул, як ДНК (дезоксирибонуклеїнова кислота) і РНК (рибонуклеїнова кислота), аж ніяк не нова. Вона, безумовно, близька колу не-науковців, пересічних людей, особливо у 21 столітті, коли гаджети та різноманітне медичне обладнання заповнюють наше повсякденне життя. Саме ця тема, на нашу думку, та її наслідки, зокрема рак, є частиною тієї «катастрофічної прірви», що існує між двома культурами, про яку писали C. Snow у "The Two Cultures" та P. Feyerabend у "Farewell to Reason" (див. також [1]). Як би парадоксально це не звучало – просто як "прірва (chasm)" внаслідок фрагментації генетичних макромолекул – але ця робота змусила нас замислитися над темою і після того, як вона була написана і прийнята до друку [2]: запитайте кого завгодно – рідкісний твір заслуговує на таку долю. І це не дивно: зазвичай робота пишеться таким чином, щоб поставити крапку в якійсь проблемі або темі. Власне, жирну крапку.
Ключові слова: дисоціативна іонізація, біомолекули, поверхня потенціальної енергії

O. Bukalov
The Centre for Physical and Space Research of the International Institute of Socionics, Illenko Str., 12, 04050, Kyiv, Ukraine.
e-mail: boukalov@gmail.com

BARYON ASYMMETRY: IS THE REALIZATION OF COSMOLOGICAL ENERGIES AND PROCESSES POSSIBLE IN LOCAL ASTROPHYSICAL EVENTS?

A formula has been proposed that well describes the baryon-photon ratio. It implies a relationship between the value of the proton mass and gravity with the value of baryon asymmetry. If the baryogenesis process occurred at energies below 10^{12}GeV, it should also occur in modern high-energy astrophysical processes, the indicators of which are ultra-high-energy cosmic rays. But this would lead to a regular and significant violation of the law of conservation of baryon number in the form of the effect of proton decay. However, experimental data impose significant restrictions on this process. Therefore, we propose the principle of energy prohibition, according to which it is impossible to achieve energies at which baryon number violation can occur in astrophysical and experimental local processes in a cosmologically stable vacuum. This conclusion supports the baryogenesis models realized in the era of Grand Unification or during inflaton decay, i.e. at energies of $10^{13}\div 2\cdot 10^{16}$GeV. Therefore, baryogenesis models considering energies below 10^{12}GeV need to be revised.
Keywords: baryon asymmetry, proton mass, leptons, proton decay, baryon number, cosmic rays, black holes, vacuum stability.

1. Introduction

The origin of baryon asymmetry is still an unsolved problem. There are various scenarios for the origin of this asymmetry, but it is still unclear at what energy the symmetry of quarks and antiquarks is broken. The ratio of the number of baryons in the Universe to the number of cosmic microwave photons, which are supposedly produced by the annihilation of particles and antiparticles, is [1]

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.14 \pm 0.04)\cdot 10^{-10}, \qquad (1)$$

where n_B is the density of baryons, $n_\gamma = 410/\mathrm{sm}^3$ is the density of photons.

Ratio

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \frac{n_\gamma}{s}\eta_B = \frac{2\xi(3)}{\frac{4\pi^2}{90}\left(2+\frac{7}{8}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{4}{11}\right)}\eta_B = 0.14\eta_B = 0.87\cdot 10^{-10} \qquad (2)$$

where n_B and $n_{\bar{B}}$ are the number densities of baryons and antibaryons, s is the entropy density in the Universe, is a numerical characteristic of the baryon asymmetry of the Universe, which is constant in time [2].

In this case, the value η_B is determined from the abundance of chemical elements in the Universe and measurements of the relic microwave radiation [2], and is not a consequence of a theoretical calculation.

2. Formula for baryon asymmetry and its consequences

Existing theories of the origin of baryon asymmetry do not allow us to give an exact value η_B without additional hypotheses or fitting parameters of the model. However, the value η_B satisfies a simple formula:

$$\eta_B = \left(\frac{(24)^{1/2} m_p}{M_P} \right)^{1/2} = m_p^{1/2} \left(\frac{24 G_N}{\hbar c} \right)^{1/4} = 6.136 \cdot 10^{-10}, \quad (3)$$

$$\eta_B^{-1} = 1.6297 \cdot 10^{-9}, \quad (4)$$

where M_P is the Planck mass, m_p is the proton mass. Instead of the proton mass m_p, we can consider the neutron mass, obtaining the value $\eta_B^{-1} = 1.6285 \cdot 10^{-9}$, but the difference is insignificant and the free neutron is unstable.

At the same time

$$\eta_B^{-2} = \frac{M_P}{(24)^{1/2} m_p} = 2.655 \cdot 10^{18} = \frac{\alpha_{G_p}^{-1/2}}{(24)^{1/2}}. \quad (5)$$

Thus, η_B is related to the gravitational fine structure constant for the proton $\alpha_{G_p} = G_N m_p^2 / (\hbar c)$. Considering the formula (5) as exact, we obtain the mass of the proton:

$$m_p = \eta_B^{\,2} \cdot \frac{M_P}{(24)^{1/2}}. \quad (6)$$

From the formula (6) it follows that the baryon number asymmetry factor X_B determines the proton mass. This means that this factor, determining η_B, is a constant value, since $\eta_B = const$, and acts not only at high energies, as is assumed in most mechanisms for the appearance of baryon asymmetry, but also at low energies. The same factor X_B determines the value of the baryon number. Therefore, the baryon charge can probably be considered as a stable value, like an electric charge. It depends only on the factor X_B, which breaks the symmetry and determines the mass of the proton. From this point of view, if there is a decay of the baryon, then this process correlates with a very slow change in the mass of the proton, since they are determined by the same factor.

The presence of a constant asymmetric factor X_B that ensures a stable baryon number and proton mass may indicate the existence of a field corresponding to the baryon charge. It is believed that the baryon field does not exist, otherwise a specific baryon-baryon interaction would arise [3]. However, such field may exist in the form of a condensate in which baryons

play the role of excitations. This is probably evidenced by the formula of Ya.B. Zeldovich [4] for the vacuum energy density of the form

$$\rho_v = \frac{Gm_x^6 c^2}{\hbar^4},$$

modified by N.S. Kardashev, who suggested $m_x \approx m_\pi$ [5], and the author [6], who refined it for the condensate of virtual π-mesons with mass $m_{\pi^\pm}/2$.

The vacuum energy density (dark energy) can be described as

$$\rho_v = \frac{1}{16\pi^4}\frac{G_N c^2 m_{\pi^0}^6}{\hbar^4} = \frac{G_N c^2 m_{\pi^0}^6}{h^4} \approx 6.09\cdot 10^{-30}\ \text{g/ cm}^3. \qquad (7)$$

This value is in good agreement with the PLANK collaboration [7] and other data. According to J. Pratt et al [8] the measured density dark energy is $(6.03\pm0.13)\cdot 10^{-30}$g/cm^3.

Apparently, an asymmetry similar to the baryon one also arises for the lepton number. Electrons can be the carrier of such an excess lepton number $N_{\Delta L}$, neutralizing the positive electric charges of protons; and the number of which is equal to the number of protons as baryons. In this case, $N_{\Delta L} = N_B$. From the point of view of the theory of the cosmological model with superconductivity (CMS) [9, 10], the asymmetry of baryons and antibaryons arises as a result of symmetry breaking in the superconducting transition.

3. Low-energy models of baryogenesis and conservation of baryon number

Currently, many works have appeared suggesting the manifestation of asymmetry of matter and antimatter, the appearance of the baryon number at relatively low energies. This is, for example, baryogenesis at energies of electroweak interactions of the order of 10^{12}eV. The possibility of inflation and subsequent heating at low energies is considered in a similar way. This work is devoted to the consideration of the realism of such processes.

In a number of baryogenesis models, the characteristic energy is assumed to be relatively low, on the order of 10^{12}eV [11, 12, 13]. At the same time, in the Grand Unification models, the energies of X- and Y-particles that can cause proton decay, i.e. non-conservation of baryon number, are, taking into account modern experimental data, on the order of 10^{25}eV [14]. At the same time, in the cosmological model with superconductivity (CMS), proposed by the author [9, 10], the baryon number arises as a consequence of the phase transition, and CMS gives the observed number of baryons in the Hubble radius.

Experiments do not show proton decay, so the possible time of its decay exceeds 10^{35} years. Thus, there are all physical grounds to consider the proton a stable particle. However, in a number of astrophysical processes, such as blazar radiation, supernova explosions, in magnetars, the realization of energies of the order of 10^{20-21}eV is possible, the indicator of which are cosmic rays. And this means that if baryogenesis processes could be realized in low-energy processes, the baryon number of the Universe would constantly change on a significant scale in all active astrophysical processes with energies up to $5\cdot 10^{20}$ eV. Obviously,

this is extremely unlikely. In turn, this means that such fundamental processes as baryogenesis occurred in the early Universe at cosmological energies unattainable in local astrophysical processes, that is, at $E>10^{21.5–22}$ eV, and such a cosmological process is separated from the local one by a significant energy interval (a kind of "energy gap"). Thus, we justifiably introduce **the principle of an energy ban on the local astrophysical implementation of baryogenesis processes, which implies the possibility of its occurrence only at high energies, as is realized in the Grand Unification Theory.**

4. Energy conditions for conservation of baryon number

Let us now consider the processes in the early Universe. In different inflation models, the hot stage (reheating) occurs at different energies. If we consider the model of A. Starobinsky [15], which agrees better with experimental data than other models, then the mass of the inflaton in it is $M = 3.2 \cdot 10^{22}$ eV. The decay of the inflaton leads to the appearance of elementary particles of the same energy. Apparently, such energies are already unattainable for local astrophysical processes. This is evidenced by the maximum energy of observed cosmic rays: $E \le 3 \cdot 10^{20}$ eV. Thus, an energy interval of 50–100 times appears, separating the cosmological and astrophysical energies. Apparently, the local implementation of higher energies than astrophysical ones would be equivalent to recreating the cosmological conditions of a change in vacuum with the appearance of inflatons and subsequent inflationary processes. But, apparently, the global conditions of stability of the modern vacuum and space-time do not allow such energies to be achieved in the modern Universe.

5. Baryons and leptons in black holes

The question also arises whether it is possible to consider that the baryon and lepton numbers of the Universe change during the collapse of matter into black holes. Considering that information is not lost but is present on the event horizon, it can be concluded that the baryon and lepton numbers of the Universe do not change. In addition, a black hole is a part of the Universe, and proton decay, even if it occurs in the region of the black hole singularity, is in principle not observable for an external observer, since even the time of falling onto the black hole horizon slows down to infinity for an external observer. These conclusions also correspond to the description of a black hole in CMS as a condensate of primary fermions [9, 10], which, apparently, can preserve the baryon and lepton numbers of the collapsed matter.

Conclusions

1. The baryon asymmetry is determined by a constantly acting factor X_B, which in turn is related to the gravitational constant of the fine structure of the proton (or neutron). This factor determines both the mass of the proton and, apparently, the asymmetry of the dark

matter particles. The stability of this factor X_B determines the stability of the baryon number.

2. Also, as a hypothesis, we can formulate the principle of the energy prohibition, according to which in astrophysical and experimental local processes under conditions of a cosmologically stable vacuum it is impossible to achieve energies at which violations of the baryon and lepton number can occur, the maximum energies of the Big Bang after inflation, such as the energy of inflaton decay. In turn, this imposes lower limits on the energy of heating after inflation associated with baryogenesis, $E > 10^{21.5–22}$ eV. The proposed principle of energy prohibition can be explained by the fact that stable space-time and vacuum, containing the fields and matter of the Universe, do not allow high-energy processes that violate their own stability and lead to the restoration of the conditions of the birth of the Universe, including the processes of baryogenesis, leptogenesis, inflation, the formation of space-time and other global cosmological processes.

List of references

1. N.Aghanim et al (Planck Collaboration). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. – 2020. – V. 641. – A6.
2. D.S.Gorbunov, V.A.Rubakov. Introduction to the Theory of the Early Universe. The Theory of the Hot Big Bang (LKI, Moskow, 2006).
3. A.D.Dolgov, Ya.B.Zeldovich, M.V.Sazhin. Cosmology of the early Universe (Publishing house of Moscow University, Moscow, 1988).
4. Ya.B.Zeldovich. The cosmological constant and elementary particles // Pis'ma JETP. – 1967. – No. 6. – P. 883–884.
5. N.S.Kardashev. Inflation of the modern Universe // Astronomical Journal. – 1997. – V. 74. – No. 6. – P.803–809.
6. A.V.Bukalov. A solution to the cosmological constant problem, the possible nature of the physical time and the origin of the baryon charge // 5-th Gamow International Conference in Odessa “Astrophysics and Cosmology after Gamow: progress and perspectives”, 16-23 August, 2015, Odessa, Ukraine.
7. P.A.R.Ade, N.Aghanim et al (Planck Collaboration). Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results // Astronomy & Astrophysics. – 2014. – V. 571. – P. A1. – arXiv:1303.5062.
8. J.Prat, C.Hogan, C.Chang, J.Frieman. Vacuum energy density measured from cosmological data // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2022. – V. 2022. – No. 6. – P. 015. – doi:10.1088/1475-7516/2022/06/015.
9. A.V.Bukalov. The solution of the cosmological constant problem and the formation of the space-time continuum // Odessa Astron. Publ. – 2016. – V. 29 (1). – P. 42–45.
10. O.Bukalov. On the solution of the problem of the cosmological constant // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”. Book of

Abstracts. – 2024. – P. 21.
11. A.D.Dolgov. Baryogenesis, 30 years after // Surveys in High Energy Physics. – 1997. – V. 13. – No. 1–3. – P. 83–117. – doi:10.1080/01422419808240874.
12. V.A.Kuzmin, V.A.Rubakov, M.E.Shaposhnikov. On anomalous electroweak baryon-number non-conservation in the early universe // Physics Letters B. – 1985. – V. 155 (1–2). – P. 36–42. – doi:10.1016/0370-2693(85)91028-7.
13. M.Trodden. Electroweak Baryogenesis // Reviews of Modern Physics. – 1999. – V. 71 (5). – P. 1463–1500. – arXiv:hep-ph/9803479.
14. A.Riotto. Theories of Baryogenesis (1998). – arXiv:hep-ph/9807454.
15. A.A.Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters B. – 1980. – V. 91 (1). – P. 99–102.

О. Букалов
Центр фізичних та космічних досліджень Міжнародного інституту соціоніки,
вул. Іллєнка, 12, 04050, м. Київ, Україна.
e-mail: boukalov@gmail.com

БАРИОННА АСИМЕТРІЯ: ЧИ МОЖЛИВА РЕАЛІЗАЦІЯ КОСМОЛОГІЧНИХ ЕНЕРГІЙ ТА ПРОЦЕСІВ У ЛОКАЛЬНИХ АСТРОФІЗИЧНИХ ПОДІЯХ?

Запропоновано формулу, яка добре описує баріон-фотонне співвідношення. Вона встановлює передбачає зв'язок між значенням маси протона та гравітації зі значенням баріонної асиметрії. Якщо процес баріогенезу відбувався при енергіях нижче 10^{12}ГеВ, то він повинен відбуватися також в сучасних високоенергетичних астрофізичних процесах, індикаторами яких є космічні промені надвисоких енергій. Але це призвело б до регулярного та істотного порушення закону збереження баріонного числа у вигляді ефекту розпаду протона. Проте експериментальні дані накладають суттєві обмеження на цей процес. Тому ми пропонуємо принцип енергетичної заборони, згідно з яким неможливо досягти енергій, при яких можливе порушення баріонного числа в астрофізичних та експериментальних локальних процесах у космологічно стабільному вакуумі. Цей висновок підтверджує моделі баріогенезу, реалізовані в епоху Великого Об'єднання або під час розпаду інфлатону, тобто при енергіях $10^{13}\div2\cdot10^{16}$ГеВ. Тому моделі баріогенезу, що враховують енергії нижче 10^{12}ГеВ, потребують перегляду.
Ключові слова: баріонна асиметрія, маса протона, лептони, розпад протона, баріонне число, космічні промені, чорні діри, стабільність вакууму.

I. Gapyak[1,2], V. Gerasimenko[1]
[1] *Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Tereschenkivska st., 3, 01024, Kyiv*
gerasym@imath.kiev.ua
[2] *Taras Shevchenko National University of Kyiv, Volodymyrska st., 64/13, 01601, Kyiv*
ihapiak@knu.ua

THE HIERARCHY OF EVOLUTION EQUATIONS FOR CORRELATIONS OF QUANTUM MANY-PARTICLE SYSTEMS

In the article we review an approach to describing processes of propagation of correlations in many-particle quantum systems based on the hierarchy of evolution equations for operators characterizing the state correlations. It is established that the constructed dynamics of correlations underlies the description of the dynamics of both finitely and infinitely many quantum particles governed by the BBGKY hierarchies for reduced density operators or reduced correlation operators.
Key words: quantum systems, BBGKY hierarchie, correlations, cumulants of density operators

Introduction

Describing quantum processes for information transfer, based on the evolution equations of state correlations, continues to be an open challenge. A deeper comprehension of quantum-scale transport can lead to substantial advancements in quantum information processing, that radically change conventional network technology methods.

In the article we review an approach to describing processes of propagation of correlations in many-particle quantum systems [1],[2] based on the hierarchy of evolution equations for operators characterizing the state correlations (cumulants of density operators) [3],[4],[5]. It is established that the constructed dynamics of correlations underlies the description of the dynamics of both finitely and infinitely many quantum particles governed by the BBGKY hierarchies for reduced density operators [6] or reduced correlation operators [7]. Furthermore, an approach to describing correlations in many-particle quantum systems by means of a one-particle correlation operator determined by the non-Markovian generalization of the quantum kinetic equation is considered [8]. The mathematical origin of quantum kinetic equations describing the scaling asymptotic behavior of hierarchies of evolution equations is also discussed.

1 Dynamics of correlations

An alternative approach to describing the state of a quantum system of a finite average number of particles is to describe the state by means of cumulants of a density operator, which are interpreted as correlations of the state of particles [3].

We introduce sequence $g(t) = (I, g_1(t,1), \ldots, g_s(t,1,\ldots,s), \ldots)$ of correlation operators by means of cluster expansions of the density operators $D(t) = (I, D_1(t,1), \ldots, D_n(t,1,\ldots,n), \ldots)$:

$$D_n(t,1,\dots,n) = g_n(t,1,\dots,n) + \sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,n)=\cup_i X_i,|\mathrm{P}|>1} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i), \quad n\geq 1, \tag{1}$$

where $\sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,n)=\cup_i X_i,|\mathrm{P}|>1}$ is the sum over all possible partitions P of the set of indices $(1,\dots,n)$ on $|\mathrm{P}|>1$ non-empty subsets $X_i \subset (1,\dots,n)$, which are not mutually intersecting. The solutions of recurrent relations (1) are determined by the following expansions:

$$g_s(t,1,\dots,s) = D_s(t,1,\dots,s) + \sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,s)=\cup_i X_i,|\mathrm{P}|>1} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} D_{|X_i|}(t,X_i), \quad s\geq 1. \tag{2}$$

The structure of expansions (2) is such that correlation operators can be interpreted as cumulants (semi-invariants) of density operators.

If $g_s^0 \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, $s\geq 1$, where the space $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$ is the space of trace-class operators, then for $t\in\mathbb{R}$ sequence of correlation operators (2) is a unique solution of the Cauchy problem of the von Neumann hierarchy [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_s(t,1,\dots,s) = \mathcal{N}_s^* g_s(t,1,\dots,s) + \sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,s)=X_1\cup X_2} \sum_{i_1\in X_1} \sum_{i_2\in X_2} \epsilon \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_1,i_2) g_{|X_1|}(t,X_1) g_{|X_2|}(t,X_2), \tag{3}$$

$$g_s(t,1,\dots,s)|_{t=0} = g_s^0(1,\dots,s), \quad s\geq 1, \tag{4}$$

where the symbol $\sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,s)=X_1\cup X_2}$ means the sum over all possible partitions P of the set $(1,\dots,s)$ on two nonempty subsets X_1 and X_2, which are not mutually intersect, and the operators $\mathcal{N}_s^*$, $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_1,i_2)$ are defined by the formula

$$\mathcal{N}_n^* f_n \doteq -i(H_n f_n - f_n H_n), \tag{5}$$

and we used units where $h = 2\pi\hbar = 1$ is a Planck constant, $m = 1$ is particle mass. Operator (5) has such structure: $\mathcal{N}_n^* = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}^*(j) + \epsilon \sum_{j_1<j_2=1}^n \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(j_1,j_2)$, where the operator $\mathcal{N}^*(j)$ is the generator of the von Neumann equation of noninteracting particles and the operator $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*$ is defined is defined by the operator of the particle interaction: $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(j_1,j_2) f_n \doteq -i(\Phi(j_1,j_2) f_n - f_n \Phi(j_1,j_2))$.

We emphasize that the von Neumann hierarchy (3) is a set of recurrent evolution equations.

If the initial state is described by a sequence of correlation operators $g(0) = (I, g_1^0(1),\dots, g_n^0(1,\dots,n),\dots) \in \oplus_{n=0}^\infty \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, then the evolution of all possible states of a quantum system of many particles, i.e., the sequence $g(t) = (I, g_1(t,1),\dots, g_s(t,1,\dots,s),\dots)$ of correlation operators $g_s(t)$, $s\geq 1$, is determined by such a group of nonlinear operators:

$$g_s(t,1,\dots,s) = \mathcal{G}(t;1,\dots,s\,|\,g(0)) \doteq \sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,s)=\cup_j X_j} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\dots,\{X_{|\mathrm{P}|}\}) \prod_{X_j\subset \mathrm{P}} g_{|X_j|}^0(X_j), \quad s\geq 1, \tag{6}$$

where $\sum_{\mathrm{P}:(1,\dots,s)=\cup_j X_j}$ is the sum over all possible partitions P of the set of indices $(1,\dots,n)$ on $|\mathrm{P}|>1$ non-empty subsets X_j, which are not mutually intersecting, the set $(\{X_1\},\dots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})$

consists of elements that are subsets $X_j \subset (1,\ldots,s)$, i.e., $|(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})| = |\mathrm{P}|$. The generating operator $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ of expansion (6) is the $|\mathrm{P}|$-th order cumulant of groups of operators, which is determined by such expansion

$$\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\}) \doteq \sum_{\mathrm{P}':(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'} \mathcal{G}^*_{|\theta(Z_k)|}(t,\theta(Z_k)), \tag{7}$$

where θ is the declusterization mapping: $\theta(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\}) \doteq (1,\ldots,s)$ and on the space $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ the one-parameter mapping $\mathcal{G}^*(t) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}^*_n(t)$ is defined by

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}^*_n(t) f_n \doteq e^{-itH_n} f_n e^{itH_n}, \tag{8}$$

and forms a strongly continuous isometric group of operators.

In particular case of the absence of correlations between the particles at the initial instant, i.e. of the initial state describing by the sequence of correlation operators $g^{(c)}(0) = (0, g_1^0(1), 0, \ldots, 0, \ldots)$, expansions (6) take the form:

$$g_s(t,1,\ldots,s) = \mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)\prod_{i=1}^{s} g_1^0(i), \quad s \geq 1,$$

where the s-th order cumulant $\mathfrak{A}_s(t)$ of the groups of operators (8) is defined by the following expansion

$$\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{\mathrm{P}:(1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} \mathcal{G}^*_{|X_i|}(t,X_i), \tag{9}$$

and where it was used notations accepted in formula (6).

Thus, the cumulant origin of correlation operators (2) induces a cumulant structure of group (6).

2 The BBGKY hierarchies of evolution equations

Note that the description of the evolution of a state of quantum systems of many particles by means of reduced density operators governed by the BBGKY hierarchy or reduced correlation operators, which are their cumulants, can be based on an approach originated by the dynamics of correlations governed by the von Neumann hierarchy (3) for correlation operators. Within the framework of this approach the reduced density operators are defined by the following series:

$$F_s(t,1,\ldots,s) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\, g_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n), \quad s \geq 1, \tag{10}$$

where the correlation operators $g_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, of particle cluster and particles are represented by the expansions:

$$g_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n) = \sum_{\mathrm{P}:(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{\theta(X_1)\},\ldots,\{\theta(X_{|\mathrm{P}|})\}) \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g^0_{|X_i|}(X_i), \quad n \geq 0,$$

in which the notations from formula (6) are used. The reduced correlation operators are defined by the following series:

$$G_s(t,1,\ldots,s) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\, g_{s+n}(t,1,\ldots,s+n), \quad s \geq 1, \tag{11}$$

where the correlation operators $g_{s+n}(t),\ n \geq 0,$ are represented by expansions (6).

If $F(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, the for arbitrary $t \in \mathbb{R}$ the sequence $F(t) = (I, F_1(t,1),\ldots, F_s(t,1,\ldots,s),\ldots)$ of reduced density operators (10) satisfies the Cauchy problem of the quantum BBGKY hierarchy:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t,1,\ldots,s) = \mathcal{N}_s^* F_s(t,1,\ldots,s) + \epsilon \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Tr}_{s+1} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(j, s+1) F_{s+1}(t,1,\ldots,s,s+1), \tag{12}$$

$$F_s(t,1,\ldots,s)\,|_{t=0} = F_s^0(1,\ldots,s), \quad s \geq 1. \tag{13}$$

The solution of the Cauchy problem (12), (13) is represented by the following series:

$$F_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\}, s+1,\ldots,s+n) F_{s+n}^0(1,\ldots,s+n), \quad s \geq 1,$$

where the generating operator of this series

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\}, s+1,\ldots,s+n) = \sum_{\mathrm{P}:(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\cup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\,\mathrm{P}\,|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathcal{G}^*_{|\theta(X_i)|}(t, \theta(X_i)) \tag{14}$$

is the $(1+n)$-th order cumulant of the groups of operators (8). In expansion (14) symbol $\sum_{\mathrm{P}}$ means the sum over all possible partitions P of the set $(\{1,\ldots,s\}, s+1,\ldots,s+n)$ on $|\,\mathrm{P}\,|$ nonempty subsets $X_i \subset (\{1,\ldots,s\}, s+1,\ldots,s+n)$, which do not mutually intersect, and the notations introduced in (6) are used.

Note that the solution of the Cauchy problem (12), (13) is traditionally represented as a perturbation (iteration) series. For initial data from the space $\mathfrak{L}^1_{\alpha}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ series expansion (14) is equivalent to the iterative series due to the validity of analogs of the Duhamel equation for cumulants (14).

An alternative approach, as noted above, to the description of the evolution of the state of quantum systems can be formulated by means of operators defined by cluster expansions of the reduced density operators, namely:

$$G_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{\mathrm{P}:(1,\ldots,s)=\cup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\,\mathrm{P}\,|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1,$$

where the notation from formula ((2)) was used. Such cumulants of reduced density operators are interpreted as reduced correlations of the state.

If $G(0) \in\in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, then for arbitrary $t \in \mathbb{R}$ the sequence of reduced correlation operators (15) satisfies the Cauchy problem for the hierarchy of nonlinear evolution equations (quantun nonlinear BBGKY hierarchy):

$$\frac{\partial}{\partial t}G_s(t,1,\ldots,s) = \mathcal{N}_s^* G_s(t,1,\ldots,s) + \sum_{\mathrm{P}:(1,\ldots,s)=X_1\cup X_2}\sum_{i_1\in X_1}\sum_{i_2\in X_2}\epsilon\,\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_1,i_2)G_{|X_1|}(t,X_1)G_{|X_2|}(t,X_2)) + \quad (15)$$

$$\mathrm{Tr}_{s+1}\sum_{i\in(1,\ldots,s)}\epsilon\,\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,s+1)(G_{s+1}(t,1,\ldots,s+1) + \sum_{\substack{\mathrm{P}:(1,\ldots,s+1)=X_1\cup X_2,\\ i\in X_1;\,s+1\in X_2}} G_{|X_1|}(t,X_1)G_{|X_2|}(t,X_2)),$$

$$G_s(t,1,\ldots,s)|_{t=0} = G_s^0(,1,\ldots,s), \quad s\geq 1, \quad (16)$$

where the notations accepted for the hierarchy of equations (3) are used.

In the case of the initial state in the absence of correlations between the particles, i.e. the state described by the sequence $G^{(c)} = (0, G_1^0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, the solution of the Cauchy problem (15), (16) is represented by the following series:

$$G_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{s+n}(t;1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}G_1^0(i), \quad s\geq 1, \quad (17)$$

where the generating operator $\mathfrak{A}_{s+n}(t)$ is the $(s+n)$-th order cumulant (9) of groups of operators (8). We note that for such an initial state, the expressions for the reduced density operators (14) and the reduced correlation operators (17) differ only in the order of the generating operators of the series representing these solutions.

Thus, as a result of definitions (10) and (11), we establish that the cumulant structure of generating operators of expansions for correlation operators (6) induces the cumulant structure of series for reduced density operators (14) and reduced correlation operators (17), i.e. in fact, the evolution of a system of infinitely many particles is generated by the dynamics of correlations.

Note that the methods developed above can be applied to describe the propagation of correlations in open quantum systems, that is, quantum systems interacting with an external environment [9].

3 On quantum kinetic equations

We consider a system of many particles that satisfy the Maxwell-Boltzmann statistics, in the absence of correlations between particles at the initial time, i.e. the initial state determined by a one-particle density operator, namely, such a sequence of reduced density operators $F^{(c)} = (I, F_1^0(1), \ldots, \prod_{i=1}^n F_1^0(i), \ldots)$. We emphasize that the formulated assumption about the initial state is inherent in the kinetic theory of many-particle systems.

Due to the fact that the initial state is determined by a one-particle density operator the evolution of all possible states is described by a sequence $F(t\,|\,F_1(t)) = (I, F_1(t), F_2(t\,|\,F_1(t)), \ldots, F_s(t\,|\,F_1(t)), \ldots)$ of the reduced functionals of the state $F_s(t,1,\ldots,s\,|\,F_1(t))$, $s\geq 2$, which are represented by the series [8]:

$$F_s(t,1,\ldots,s\,|\,F_1(t)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,i), \quad s\geq 2, \quad (18)$$

with respect of a one-particle density operator

$$F_1(t,1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{2,\dots,1+n}\mathfrak{A}_{1+n}(t,1,\dots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^0(i), \tag{19}$$

which describes the evolution of the state of a typical particle of a quantum system of many particles. The generating operators of the series (19) are the cumulants (14) of the corresponding order of the groups of operators (8).

The reduced functionals of the state $F_s(t\,|\,F_1(t))$, $s\geq 2$, describe all possible correlations that created in the process of evolution of the quantum system of many particles in terms of the state of a typical particle. The $(1+n)$-th order generating operator of the series ((18)) is determined by the following expansion

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,\dots,s\},s+1,\dots,s+n)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{n_1=1}^{n}\dots\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\dots-n_{k-1}}\frac{1}{(n-n_1-\dots-n_k)!}\times \tag{20}$$

$$\mathfrak{A}_{1+n-n_1-\dots-n_k}(t,\{1,\dots,s\},s+1,\dots,s+n-n_1-\dots-n_k)\prod_{j=1}^{k}\sum_{\mathrm{D}_j:Z_j=\cup_{l_j}X_{l_j},\ |\mathrm{D}_j|\leq s+n-n_1-\dots-n_j}\frac{1}{|\mathrm{D}_j|!}\times$$

$$\sum_{i_1\neq\dots\neq i_{|\mathrm{D}_j|}=1}^{s+n-n_1-\dots-n_j}\prod_{X_{l_j}\subset\mathrm{D}_j}\frac{1}{|X_{l_j}|!}\mathfrak{A}_{1+|X_{l_j}|}(t,i_{l_j},X_{l_j}),$$

where the symbol $\sum_{\mathrm{D}_j:Z_j=\cup_{l_j}X_{l_j}}$ means the sum over all possible dissections of the linearly ordered set $Z_j\equiv(s+n-n_1-\dots-n_j+1,\dots,s+n-n_1-\dots-n_{j-1})$ on no more than $s+n-n_1-\dots-n_j$ linearly ordered subsets and the generating operator of this expansion $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ is the $(1+n)$-th order cumulant (14) of the groups of scattering operators

$$\mathcal{G}_n(t)\doteq\mathcal{G}_n^*(t,1,\dots,n)\prod_{i=1}^{n}(\mathcal{G}_1^*(t,i))^{-1},\quad n\geq 1,$$

We give the simplest examples of generating operators of expansion (20):

$$\mathfrak{V}_1(t,\{1,\dots,s\})=\mathfrak{A}_1(t,\{1,\dots,s\}),$$

$$\mathfrak{V}_{1+1}(t,\{1,\dots,s\},s+1)=\mathfrak{A}_2(t,\{1,\dots,s\},s+1)-\mathfrak{A}_1(t,\{1,\dots,s\})\sum_{i=1}^{s}\mathfrak{A}_2(t,i,s+1).$$

Thus, according to definition (10), the cumulant structure of generating operators of expansions for correlation operators (11) induces a generalized cumulant structure of generating operators for series of reduced functionals of the state (18).

If $F_1^0\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$, then for an arbitrary $t\in\mathbb{R}$ a one-particle density operator (19) satisfies the Cauchy problem for the generalized quantum kinetic equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,1)=\mathcal{N}^*(1)F_1(t,1)+\epsilon\,\mathrm{Tr}_2\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(1,2)F_2(t,1,2\,|\,F_1(t)), \tag{21}$$

$$F_1(t,1)\,|_{t=0}=F_1^0(1), \tag{22}$$

where the collision integral is determined by the two-particle functional of the state (18) and the notation is used (5).

Thus, for the initial state in the case of the absence of correlations between particles, that is the state specified by a one-particle density operator, the evolution of all possible states of a quantum many-particle system can be described by a one-particle density operator (19) and by a sequence of functionals with respect of this operator (18) without any scaling approximations.

4 Scaling properties of correlation evolution

We note that the above approach to the derivation of kinetic equations allows us to formulate kinetic equations in the case of more general initial states, which describe not only the gases of quantum particles but also systems of many particles in condensed states.

Let us consider the initial states of quantum systems of many particles, which are determined by a one-particle density operator and correlation operators (Maxwell–Boltzmann statistics)

$$f^{(cc)} = (I, f_1^0(1), g_2^0(1,2)\prod_{i=1}^{2} f_1^0(i), \ldots, g_n^0(1,\ldots,n)\prod_{i=1}^{n} f_1^0(i), \ldots), \tag{23}$$

where the correlations of the initial states of the particles are determined by the operators $g_n^0(1,\ldots,n) \equiv g_n^0 \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 2$. We emphasize that this assumption (23) with respect to the initial state is typical for the kinetic description of systems of many particles in condensed states, which are characterized by correlations, for example, such as in particle flows.

Then, using the method of derivation of kinetic equations based on the generalized quantum kinetic equation, for an arbitrary finite time interval we establish that in the mean-field limit the state is described by the sequence $f(t) = (I, f_1(t), \ldots, f_n(t \mid f_1(t)), \ldots)$ of limiting reduced functionals of the state where a one-particle density operator is represented by such a series

$$f_1(t,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \, \mathrm{Tr}_{2,\ldots,n+1} \prod_{i_1=1}^{1} \mathcal{G}_1^*(t-t_1, i_1) \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(1,2) \prod_{j_1=1}^{2} \mathcal{G}_1^*(t_1-t_2, j_1) \ldots \tag{24}$$

$$\prod_{i_n=1}^{n} \mathcal{G}_1^*(t_n - t_n, i_n) \sum_{k_n=1}^{n} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(k_n, n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) g_{n+1}^0(1,\ldots,n+1) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i),$$

and the limiting functionals of the state $f_k(t,1,\ldots,k \mid f_1(t)), k \geq 2,$ are determined by the following expressions:

$$f_k(t,1,\ldots,k \mid f_1(t)) = \prod_{i_1=1}^{k} \mathcal{G}_1^*(t, i_1) g_k^0(1,\ldots,k) \prod_{i_2=1}^{k} (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) \prod_{j=1}^{k} f_1(t, j), \quad k \geq 2. \tag{25}$$

In the case of initial states specified by a sequence of limiting correlation operators (23) the process of propagation of initial correlations is described by the following sequence of limiting correlation operators (15) that are cumulants of limiting functionals of the state (25) :

$$g_n(t,1,\ldots,n)=\prod_{i_1=1}^{n}\mathcal{G}_1^*(t,i_1)\sum_{\mathrm{P}:(1,\ldots,n)=\cup X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\,\mathrm{P}\,|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}g^0_{|X_i|}(X_i)\prod_{i_2=1}^{n}(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t,i_2)\prod_{j=1}^{n}f_1(t,j),\quad n\geq 2.$$

Limiting one-particle density operator (24) is governed by the quantum Vlasov kinetic equation with initial correlations:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,1)=\mathcal{N}^*(1)\,f_1(t,1)+\mathrm{Tr}_2\,\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(1,2)\prod_{i_1=1}^{2}\mathcal{G}_1^*(t,i_1)g_2^0(1,2)\prod_{i_2=1}^{2}(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t,i_2)\,f_1(t,1)\,f_1(t,2),\quad (26)$$

$$f_1(t,1)\,|_{t=0}=\,f_1^{\,0}(1).\quad (27)$$

We note that the kinetic equation (26) is a non-Markov kinetic equation. For pure states, equation (26) reduces to the Hartree kinetic equation with initial correlations. For the initial states of the system of statistically independent particles, the kinetic equation (26) coincides with the quantum Vlasov equation and limiting functionals of the state (25) describe the process of propagation of the initial chaos. The above results can be extended to systems of many bosons or fermions [5].

5 Conclusion

Thus, it was established that the concept of cumulant (9) of groups of operators forms the basis of expansions for solutions of fundamental evolution equations, which describe the evolution of quantum systems of many particles, namely: in the case of groups of operators (8) for the von Neumann hierarchy (3) for correlation operators, for the BBGKY hierarchy (12) for reduced density operators and for the hierarchy of nonlinear equations (15) for reduced correlation operators, respectively, as well as in the basis of the kinetic description (18), (21) of infinitely many particles systems [2], [6].

We remark that the approach to the derivation of the Vlasov quantum kinetic equation from the dynamics of many-particle systems, based on the generalized quantum kinetic equation (21), also allows for constructing higher-order corrections to the mean-field approximation for quantum kinetic equations.

References

1. V. I. Gerasimenko. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. In: Modern Problems of Mathematics and its Applications. I. (Eds. V. I. Gerasimenko et al., Kyiv: IM, 2020) P. 82–112. ISSN: 1815-2910
2. V. I. Gerasimenko. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations // Int. J. Evol. Equ. – 2012. – Vol. 7, №2. – P. 109–163.

3. V. I. Gerasimenko. Dynamics of quantum correlations and kinetic equations. Conference Proc. “US-Ukraine Quantum Forum 2023” – 2023 – P.12–16. https://usuaqforum.github.io/
4. V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk. Evolution of correlations of quantum many-particle systems // J. Stat. Mech.: Theory and Exper. – 2008 – P03007. DOI:10.1088/1742-5468/2008/03/p03007
5. V. I. Gerasimenko, D. O. Polishchuk. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles // Math. Methods Appl. Sci. – 2011 – Vol. 34 №1, P. 76–93. DOI:10.1002/mma.1336
6. V. I. Gerasimenko. Description of evolution of states in terms of operators originating by density matrix. In: Understanding Density Matrices (N.Y.: Nova Science Publ. Inc., 2019), P. 229–250.
7. V. I. Gerasimenko. Processes of creation and propagation of correlations in large quantum particle system. In: Panorama of Contemporary Quantum Mechanics – Concepts and Applications (London: InTech, 2019.), P. 31–47. DOI:10.5772/intechopen.82836
8. V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir. A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation // J. Phys. A – 2010 – Vol.43, №48, 485203. DOI:10.1088/1751-8113/43/48/485203
9. I. V. Gapyak. Towards the problem of propagation of correlations in open systems. Conference Proc. “US-Ukraine Quantum Forum 2023”, – 2023 – P. 12–16. https://usuaqforum.github.io/

І. Гап’як[1,2], В. Герасименко[1]
[1]Інститут математики НАН України, 01024, Київ
e-mail: gerasym@imath.kiev.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ
e-mail: ihapiak@knu.ua

ІЄРАРХІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ КОРЕЛЯЦІЙ КВАНТОВИХ СИСТЕМ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК

У статті розглянуто підхід до опису процесів поширення кореляцій у квантових багаточастинкових системах, що базується на ієрархії еволюційних рівнянь для операторів, які характеризують кореляції станів. Встановлено, що побудована динаміка кореляцій є основою для опису динаміки станів як скінченного, так і нескінченного числа квантових частинок, які описуються ієрархією ББГКІ для редукованих операторів густини або редукованих кореляційних операторів.

Ключові слова: квантові системи, ієрархія ББГКІ, кореляції, кумулянти операторів густини

О. Лендєл
Інститут електронної фізики НАН України,
вул. Університетська, 21, Ужгород
e-mail: alexanderlengyel39@gmail.com

ВПЛИВ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНОЇ ОБЛАСТІ НА СТРУКТУРУ ДИФРАКЦІЙНОГО КОНУСУ ПРУЖНОГО ПРОТОН-ПРОТОННОГО РОЗСІЯННЯ ПРИ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЯХ

Тонка структура диференціального перерізу пружного протон-протонного розсіяння досліджується в діапазоні від енергій ISR (19.4 – 62.5) ГеВ до енергій LHC (8 – 13) ТеВ в широкому інтервалі переданого імпульсу, включаючи інтерференційну область (10^{-3} ГеВ^2/c < |t| < 15 ГеВ^2/c) в двохкомпонентному наближенні Фруассарона і максимального оддерона . Розрахований у цьому наближенні усереднений параметр кривизни дифракційного конусу має складну структуру і змінює знак при асимптотично високих енергіях, далеких від досяжних.

1. ВСТУП

Останні експерименти TOTEM, виконані на Колайдері LHC, виявили дві істотні особливості пружного протон-протонного розсіяння при ТеВ-них енергіях: виразна неекспоненціальна поведінка дифракційного конуса, відмінна від існуючої ~ exp(-b|t|) при енергії 8−13 ТеВ та визначення величини відношення реальної частини амплітуди розсіяння до її уявної частини ρ=0.10 при енергії 13 ТеВ [1,2], що суперечить як передбаченням більшості моделей, так і експериментальним даним для суміжних точок по енергії. Натомість несподівано мале значення відношення ρ, виявлене в експерименті TOTEM, однозначно свідчить про перше експериментальне підтвердження існування «оддерона» в його так званому максимальному вигляді [3]. Повні перерізи, виміряні при енергіях LHC [2], вказують на те, що «асимптопія» (тобто межа Фруассара) досягнута. Враховуючи, що при високих енергіях значення повних перерізів, нахилу дифракційного конуса та величини ρ були визначені в одних і тих же експериментах на LHC, розробка сучасних критеріїв єдиного підходу для їх визначення видається природною.

Нещодавно нами були розраховані нахил $B(s,t)$ та параметр кривизни $C(s,t)$ [4] в рамках моделі Фруассарона і максимального оддерона (ФМО) [5] при енергіях LHC і малих переданих імпульсах $|t|$ з урахуванням форми дифракційного конуса. Було передбачено, що абсолютне значення усередненого параметра кривизни $<C(s)>$ спадає залежно від енергії s і змінює знак при асимптотично високих енергіях, далеких від досяжних.

Для подальшого дослідження тонкої структури дифракційного конусу пружного *pp*-розсіювання в широкому інтервалі енергій від енергій ISR до енергій LHC був використаний досвід успішного описання даних протон-протонного

розсіяння, у тому числі поляризації за допомогою двокомпонентної моделі ФМО в області переданого імпульсу 0.05 ГеВ^2/с < |t| < 5 ГеВ^2/с [6].

Нижче ми дослідили поведінку параметра кривизни з використанням модель ФМО в рамках двокомпонентної амплітуди розсіювання з переворотом та без перевороту спіну, додавши внесок інтерференції кулонівської і ядерної амплітуд [7]. Це дає змогу уточнити профіль усередненої по певному інтервалу переданого імпульсу кривизни.

2. ВИБІР ДАНИХ

У пружному протон-протонному розсіянні параметри тонкої структури дифракційного конуса, такі як нахил:

$$B(s,t) = \frac{d}{dt}\left(\ln\frac{d\sigma(s,t)}{dt}\right) \qquad (1)$$

та параметр кривизни (коротко кривизни):

$$C(s,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}B(s,t)\right) \qquad (2)$$

розглядаються як чутливий індикатор переходу до «асимптопії» [8]. Слід зазначити, що, незважаючи на невелику абсолютну величину, кривизна впливає на значення параметрів дифракційного розсіювання при малих |*t*|, тому її слід враховувати при аналізі пружного розсіювання [9].

Для подальшого дослідження складної структури диференціального перерізу протон-протонного розсіяння нами вибрано експериментальні дані, де неекспоненціальну поведінку дифракційного конуса чітко видно у всій області дослідження по енергій та переданого імпульсу.

Цей набір включає наступний перелік експериментальних даних диференціального перерізу протон-протонного розсіяння:
$E_{c.m.}$ = 19,4 [11]; 23,5; 30,7; 44,7; 52,8; 62,5 ГеВ [12]; 8 [1] і 13 ТеВ [2]. Межі *t*-діапазону враховують також кулонівсько-ядерну інтерференційну область дифракції: 10^{-3} ГеВ^2/с < |t| < 15 ГеВ^2/с.

3. НАБЛИЖЕННЯ ФМО

Використана нами модель ФМО включає лінійну і нелінійну частини експоненти функцій лишку і нелінійних траєкторій у внеску померона й оддерона [5]. Разом з тим для адекватного описання тонкої структури внеском амплітуди з переворотом спіну не слід нехтувати [7].

У загальному виді з урахуванням спіну амплітуда розсіяння визначається п'ятьма незалежними спіральними амплітудами, $\Phi_i(s,t)$, $i = 1, 2,\ldots 5$, з яких тільки дві вносять вклад у диференціальний переріз:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi k s(s-4m^2)}\left(|\Phi_1|^2 + 4|\Phi_5|^2\right), \quad (3)$$

де k= 0.38938 мб·ГеВ^2 , m – маса протона.

Взагалі, спіральні ядерні амплітуди потрібно доповнити кулонівськими амплітудами, коли розглядати область малих переданих імпульсів [7]:

$$\Phi_i(s,t) = F_i^h(s,t) + F_i^C(s,t)\exp(i\alpha\varphi(s,t)), \quad (4)$$

$$F_1^C(s,t) = \alpha f_1^2\left(\frac{s-2m^2}{t}\right), \quad (5)$$

$$F_5^C(s,t) = \alpha \frac{s}{2m\sqrt{t}} f_1 f_2, \quad (6)$$

$$f_1(t) = \frac{4m^2 - t(1+k_\mu)}{4m^2 - t} G_D, \quad (7)$$

$$f_2(t) = \frac{4m^2 k_\mu}{4m^2 - t} G_D, \quad (8)$$

$$\varphi(s,t) = -[\ln(-B(s)t/2) + \gamma], \quad (9)$$

$G_D = (1\text{-}t/\Lambda^2)^{-2}$, Λ^2=0.71 ГеВ^2/c, k_μ = 1.793 – аномальний магнітний момент протона, α = 1/137 – стала тонкої структури.

Багатокомпонентне наближення максимального померона (Фруассарона) і максимального оддерона (ФМО), яким ми користуємося, успішно описує усі доступні дані пружного *pp*- розсіювання при енергіях від кілька *ГеВ* до десятків *ТеВ* в широкому інтервалі переданих імпульсів *t* [13,14].

Спіральні амплітуди $\Phi_1(s,t)$ і $\Phi_5(s,t)$ включають внески померона, оддерона й реджеонів:

$$\Phi_i(s,t) = P_i(s,t) + O_i(s,t) + R_i(s,t). \quad (10)$$

Внесок померона:

$$P_i(s,t) = P_i^{(S)}(s,t) + P_i^{(D)}(s,t) + P_i^{(T)}(s,t) \quad (11)$$

і складається з внесків одинарного, подвійного і потрійного полюсів в j площині. Аналогічно внесок оддерона:

$$O_i(s,t) = O_i^{(S)}(s,t) + O_i^{(D)}(s,t) + O_i^{(T)}(s,t), \tag{12}$$

а внесок реджеонів:

$$R_i(s,t) = R_i^{(f)}(s,t) + R_i^{(\omega)}(s,t). \tag{13}$$

Внесок від простого та подвійного полюса померона має вигляд:

$$P_1^{(S)}(s,t) = -g_{1,p}^{(S)} \tilde{s}^{\alpha_P(t)} e^{\varphi_{1,P}^{(S)}(t)}, \tag{14}$$

$$P_5^{(S)}(s,t) = -g_{5,p}^{(S)} \frac{\sqrt{-t}}{2m} \tilde{s}^{\alpha_P(t)} e^{\varphi_{5,P}^{(S)}(t)}, \tag{15}$$

$$P_1^{(D)}(s,t) = -g_{1,p}^{(D)} \tilde{s}^{\alpha_P(t)} e^{\varphi_{1,P}^{(D)}(t)} ln\tilde{s}, \tag{16}$$

$$P_5^{(D)}(s,t) = -g_{5,p}^{(D)} \frac{\sqrt{-t}}{2m} \tilde{s}^{\alpha_P(t)} e^{\varphi_{5,P}^{(D)}(t)} ln\tilde{s}, \tag{17}$$

$$\tilde{s} = -i \frac{s-2m^2}{2m^2}, \tag{18}$$

$$\alpha_p(t) = 1 + \alpha_P' t + \gamma_P\left(\sqrt{t_\text{P}} - \sqrt{t_\text{P} - t}\right), \tag{19}$$

Внесок потрійного полюса буде:

$$P_1^{(T)}(s,t) = -\tilde{s} g_{1,P}^{(T)} \frac{2J_1(z_P)}{z_P} e^{\varphi_{1,P}^{(T)}(t)} ln^2\tilde{s}, \tag{20}$$

$$P_5^{(T)}(s,t) = -\tilde{s} g_{5,P}^{(T)} \frac{\sqrt{-t}}{2m} \frac{2J_1(z_P)}{z_P} e^{\varphi_{5,P}^{(T)}(t)} ln^2\tilde{s}, \tag{21}$$

$$z_P = r_P \tau ln\tilde{s}, \qquad \tau = \sqrt{-t/t_0}, \qquad t_0 = 1 \text{ GeV}^2. \tag{22}$$

Загальний вигляд функцій лишку буде:

$$\varphi_{P,i}(t) = b_i^{(P)} t + \beta_i^{(P)}(\sqrt{t_P} - \sqrt{t_P - t}), \qquad t_P = 4m_\pi^2. \tag{23}$$

Внесок від полюсів оддерона має вигляд:

$$O_1^S(s,t) = ig_{1,O}^{(S)}\tilde{s}^{\alpha_O(t)}e^{\varphi_{1,O}^{(s)}(t)}, \quad (24)$$

$$O_5^S(s,t) = ig_{5,O}^{(S)}\frac{\sqrt{-t}}{2m}\tilde{s}^{\alpha_O(t)}e^{\varphi_{5,O}^{(s)}(t)}, \quad (25)$$

$$O_1^D(s,t) = ig_{1,O}^{(D)}\tilde{s}^{\alpha_O(t)}e^{\varphi_{1,O}^{(D)}(t)}, \quad (26)$$

$$O_5^D(s,t) = ig_{5,O}^{(D)}\frac{\sqrt{-t}}{2m}\tilde{s}^{\alpha_O(t)}e^{\varphi_{5,O}^{(D)}(t)}, \quad (27)$$

$$O_1^{(T)}(s,t) = ig_{1,O}^{(T)}\frac{2J_1(z_O)}{z_O}e^{\varphi_{1,O}^{(T)}(t)}ln^2\tilde{s}, \quad (28)$$

$$O_5^{(T)}(s,t) = ig_{5,O}^{(T)}\frac{\sqrt{-t}}{2m}\frac{2J_1(z_O)}{z_O}e^{\varphi_{5,O}^{(T)}(t)}ln^2\tilde{s}, \quad (29)$$

$$\alpha_O(t) = 1 + \alpha' t + \gamma\left(\sqrt{t_0} - \sqrt{t_0 - t}\right), \quad (30)$$

$$z_O = r_O\tau ln\tilde{s}. \quad t_O = 9m_\pi^2. \quad (31)$$

Внески реджеонів мають стандартний вигляд:

$$R_1^{(f)}(s,t) = -g_1^{(f)}\tilde{s}^{\alpha_f(t)}e^{\varphi_1^{(f)}(t)}, \quad (32)$$

$$P_5^{(f)}(s,t) = -g_5^{(f)}\frac{\sqrt{-t}}{2m}\tilde{s}^{\alpha_f(t)}e^{\varphi_5^{(f)}(t)}, \quad (33)$$

$$\alpha_f(t) = 1 + \alpha_f' t, \quad (34)$$

$$R_1^{(\omega)}(s,t) = -g_1^{(\omega)}\tilde{s}^{\alpha_\omega(t)}e^{\varphi_1^{(\omega)}(t)}, \quad (35)$$

$$P_5^{(\omega)}(s,t) = -g_5^{(\omega)}\frac{\sqrt{-t}}{2m}\tilde{s}^{\alpha_\omega(t)}e^{\varphi_5^{(\omega)}(t)}, \quad (36)$$

$$\alpha_\omega(t) = 1 + \alpha_\omega' t. \quad (37)$$

Нагадаємо, що це одне з небагатьох наближень, в якому враховані всі основні вимоги, в тому числі як теореми Фруассара для розсіювання вперед, так і теореми Оберсона-Кіношіти-Мартена для $t \neq 0$. Беручи до уваги останні дані LHC [1,2], для опису вибраного набору даних необхідно враховувати не тільки внесок померона, але також і внесок оддерона.

Для повноти відповідності ми також додали експериментальні дані компіляції [15] при t=0 для $\sqrt{s} \geq 5$ ГеВ, які важливі для опису згаданого набору даних. Загальне число експериментальних точок перевищує 2500.

Вільні параметри моделі визначалися за підгонкою до вибраних даних. Результат підгонки цієї моделі показано на рис. 1 і 2 червоними суцільними кривими. Описання цілком прийнятне у всій досліджуваній області.

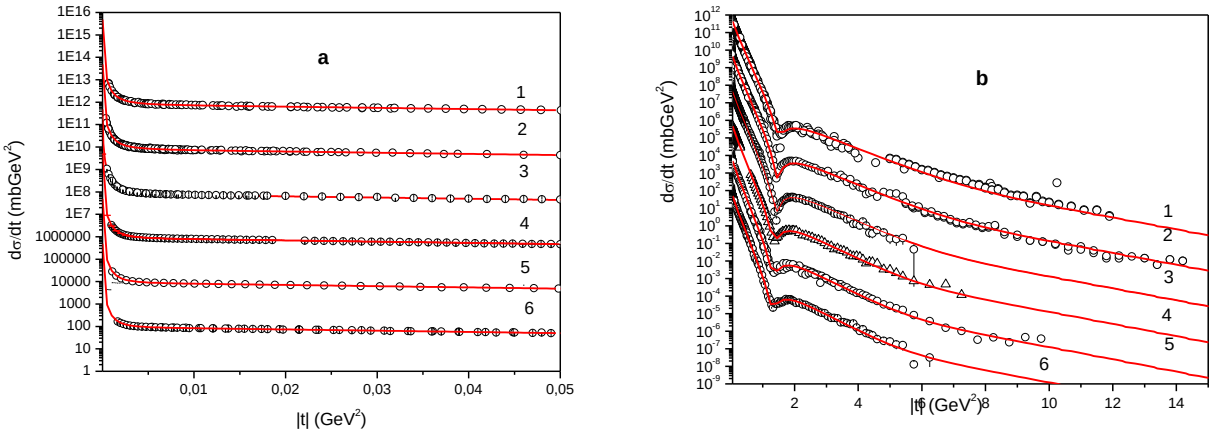


Рис. 1. Диференціальні перерізи *c* розсіяння при енергіях ISR. Вибрані експериментальні точки при енергії $\sqrt{s}$: 1 – 19.4 ГеВ (x 10^{10}); 2 – 23.5 – 27 ГеВ (x 10^8); 3 – 30.7. ГеВ (x 10^6); 4 – 44.7 ГеВ (x 10^4); 5– 52.8 4 ГеВ (x 10^2); 6 – 62.5 ГеВ. Криві розраховані за моделлю ФМО в інтервалі (a) ($10^{-3} \leq |t| \leq 0.05$) ГеВ^2/c і (b) в інтервалі ($0.05 \leq |t| \leq 15.0$ ГеВ^2/c.

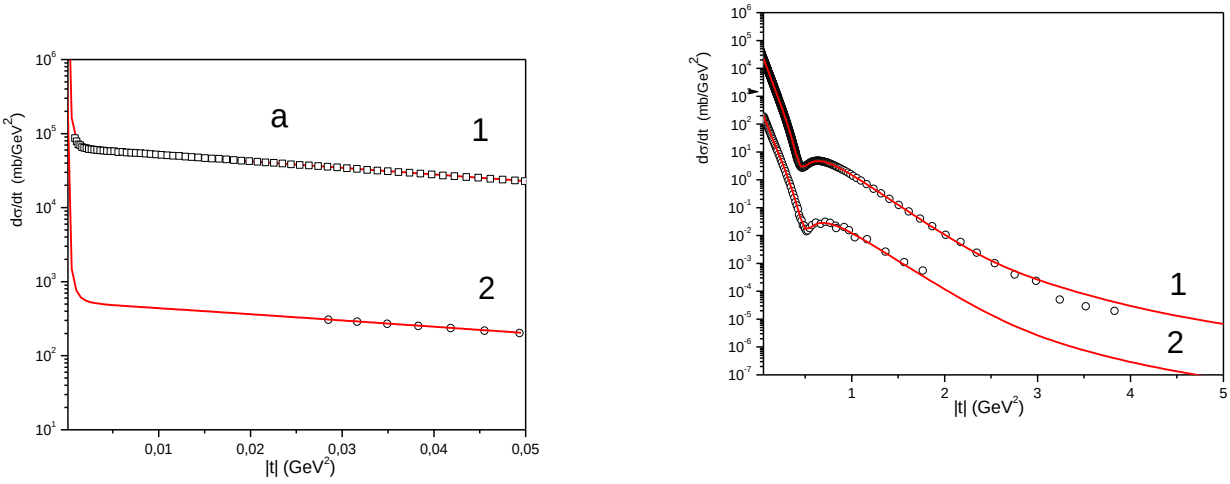


Рис. 2. Диференціальні перерізи протон-протонного розсіяння при енергіях LHC. Вибрані експериментальні точки при енергії $\sqrt{s}$: 8 TeB (x 10^2) і 2–13 TeB. Криві розраховані за моделлю ФМО в інтервалі ($10^{-3} \leq |t| \leq 0.05$) ГеВ^2/c (a) і в інтервалі ($0.05 \leq |t| \leq 5.$ ГеВ^2/c (b).

Таблиця 1. Межі для обчислення усередненого параметра кривизни в ФМО.

Набір	$\sqrt{s}, GeV$	$-t_{max}, GeV$	$-t_{min}, GeV$
ISR	19.4	0.046	0.750
	23	0.046	0,710
	31	0.046	0,672
	45	0.046	0.655
	53	0.046	0.644
	62	0.046	0.602
LHC	8000	0.048	0.156
	13000	0.052	0.132

4. ОБЧИСЛЕННЯ НАХИЛУ ТА ПАРАМЕТРА КРИВИЗНИ

Нахил у залежності від *t* при різних енергіях в моделі ФМО має увігнуту форму (див. Рис. 1 [6]). Тому в цьому випадку слід користуватися нахилом <*B(s)*> і параметром кривизни <*C(s)*>, усередненими в деякому інтервалі переданого імпульсу, що відповідає найближчому максимальному і мінімальному значенню нахилу (див. Таб.1.).

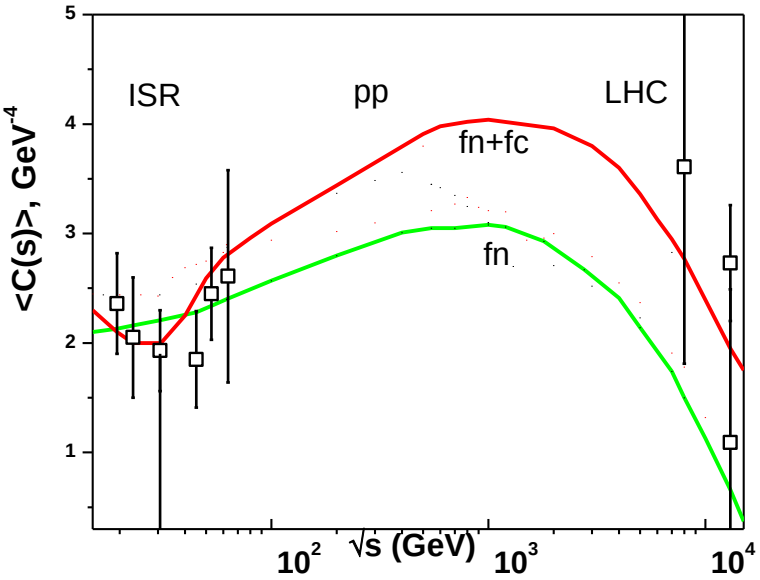


Рис.3. Усереднений параметр кривизни, обчислений у спрощеній моделі ФМО (суцільна зелена крива [10]) та у двокомпонентній моделі ФМО з урахуванням інтерференційної області (суцільна червона крива), квадрати – "експериментальні" усереднені параметри кривизни, обчислені в [10].

Обчислення виконано в інтервалі відповідно до Таблиці 1.

$$< B(s) >= (1/\Delta t)\left[\ln\left(\frac{d\sigma(t_{\min})/dt}{d\sigma(t_{\max})/dt}\right)\right]. \qquad (26)$$

де $\Delta t = |t_{\max}| - |t_{\min}|,$ (27)

$$< C(s) >= (1/2\Delta t)\Big(B(t_{\max}) - B(t_{\min})\Big). \qquad (28)$$

Для обчислення нахилу *B (s,t)* у точках t_{max} та t_{min} ми використовуємо формулу для чисельного диференціювання:

$$B(s,t) = (1/2\Delta t)\frac{\big(d\sigma(s,t+\Delta t) - \ d\sigma(s,t-\Delta t)\big)}{d\sigma(s,t)}. \qquad (29)$$

Крок вибрано як $\Delta t = 10^{-6}$ ГеВ^2.

Для обчислення *<C(s)>* за двокомпонентною моделлю ФМО інтервал переданого імпульсу вибирається відповідно до спадаючої гілки локального нахилу B (s, t) (див. таб.1.). Обчислений у цих межах усереднений параметр кривизни має спадаючий характер, як видно на рис. 3, що якісно відповідає поведінці параметра кривизни, визначеного безпосередньо з експерименту (квадрати). З цього видно, що параметр кривизни залежно від енергії змінює знак при асимптотично великих енергіях, більших за досяжних.

5. ВИСНОВКИ

Феноменологія пружного *pp*-розсіяння проаналізована в межах енергії від 19.42 ГеВ до 13 ТеВ з використанням моделі, де в аналітичних властивостях амплітуди розсіювання враховано порогові сингулярності в крос-каналі. Показано, що такі особливості адекватно відображають "неекспоненціальну" залежність диференціального перерізу від переданого імпульсу. В дослідженні використана модель ФМО, де двокомпонентна амплітуда розсіяння представлена внесками Фруассарона, максимального оддерона, а також стандартних реджеонів, здатна описати не тільки повний поперечний переріз $\sigma_{tot}(s)$ та $\rho(s)$, але й диференціальний поперечний переріз *dσ/dt(s,t)* та поляризацію пружного *pp*-розсіяння [14].

Вивчення поведінки кривизни з використанням моделі ФМО в рамках двокомпонентної амплітуди розсіяння з переворотом та без перевороту спіну з урахуванням внеску інтерференції кулонівської і ядерної амплітуд дало змогу

уточнити профіль усередненої по певному інтервалу переданого імпульсу кривизни. Отримана у такий спосіб результуюча крива краще описує «експериментальну» кривизну у порівнянні з попередніми спрощеними наближеннями (див. рис.3).

Зауважимо, що неекспоненціальна функція лишку полюсів померона й оддерона та їх нелінійні траєкторії суттєво продиктовані експериментальними даними. Як результат −усереднений параметр кривизни $<c(s)>$ в моделі максимального померона й оддерона, яка задовольняє основним принципам, має тенденцію до спаду при високих енергіях і змінює знак в області сотен ТеВ. Це означає, що "асимптопія" лежить у віддаленій області енергій, за межами досяжної.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. TOTEM Collaboration, G. Antchev et al. Evidence of non-exponential elastic proton-proton differential cross-section at low |t| and √ s =8 TeV by TOTEM // Nucl. Phys. *B.* – 2015. – V. 899. P. 527-546.
2. TOTEM Collaboration, G. Antchev et al. First determination of the ρ parameter at √ s =13 TeV – probing the existence of a colorless three-gluon bound state// Eur. Phys. J. C. – 2019. – V.79, № 785.
3. E.Mrtynov, B.Nicolescu. Did TOTEM experiment discover the Odderon?// Phys. Lett.B. – 2018. – V.778. P. 414-418.
4. N. Bence, I.Szanyi, A.Lengyel. Fine structure of the proton-proton and antiproton-proton diffraction cone at LHC energies // Journal of Physical Studies. –2022. – V. 26. P 1101 - 1-6.
5. Evgenij Martynov, Basarab Nicolescu. Odderon effect int he differential cross-section at Tevatron and LHC energies // EPJ C –2019. – V.79, № 461.
6. N. Bence, A. Lengyel, Z. Tarics, E.Martynov, G.Tersimonov, Froisaaron and Maximal Odderon with spin-flip in pp and $\bar{p}p$ high energy elastic scattering // Eur. Phys. J. A - 2021 - V.57. 265.
7. C. Ewerz, P. Lebiedowicz, O. Nachtmann, A. Szczurek. Helicity in proton–proton elastic scattering and the spin structure of the pomeron // Physics Letters B – 2016 – V.763, 382-387.

8 15. Jorge Dias de Deus and Antonio Braz de Padua. The search of asymptopia in soft physics at high energy // Phys.Lett.B. –1993– V. 317. P 428-432.

9. M. M. Block, B. N. Cahn, High-energy pp and $\bar{p}p$ forward elastic scattering and total cross sections // Rev. Mod. Phys. –1985– V.57. P 563-598.
10. **A**. Lengyel, T. Bence, I. Szanyi. Curvature of the diffraction cone of proton-proton elastic scattering at high energies in maximal pomeron and odderon model// Problems of Atomic Science and Technology – 2023 – V.145. №3. P 12-15.
11. A. Schiz et al. High-statistics study of π^+p, π^-p, and pp elastic scattering at 200 GeV/c*//Phys.Rev.D. –1981*– V. 24. P.26 - 45.

12. G. Barbiellini et. al, Small-angle proton-proton elastic scattering at very high energies (460 GeV^2<s< 2900 GeV^2)//*Phys. Lett. B,* –1972 – v.39, 663-667.
13. Evgenij Martynov, Basarab Nicolescu, Odderon effects in the differential cross-sections at Tevatron and LHC energies// *Eur. Phys. J. C,* – 2019 – V. 79. № 461;
14. N. Bence, A. Lengyel, Z. Tarics, E.Martynov, G.Tersimonov, Froisaaron and Maximal Odderon with spin-flip in pp and $\bar{p}p$ high energy elastic scattering, *Eur. Phys. J. A* – 2021– V.57. № 265.

A.Lengyel
Institute of Electron Physics of NAS of Ukraine,
Universytetska street 21, Uzhhorod
e-mail: alexanderlengyel39@gmail.com

INTERFERENTION DOMAIN INFLUENCE TO THE STRUCTURE OF ELASTIC SCATTERING DIFFRACTION CONE AT HIGH ENERGIES

The fine structure of the differential cross section of elastic proton-proton scattering is studied in the diapason from ISR energies (19.4 – 62.5) GeV to LHC energies (8 – 13) TeV in a wide range of the momentum transfer, including the interference region, 10^{-3} GeV^2/s < | t| < 15 GeV^2/s, in the two-component Froissaron and the maximal Odderon approach. The averaged curvature parameter of the diffraction cone calculated in this approximation decreases depending on the energy and has a complex structure and changes sign at asymptotically high energies that are far from achievable.

A. Nurmagambetov[1,2,3]
[1] *Akhiezer Institute for Theoretical Physics of NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine.*
[2] *Department of Physics & Technology, Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.*
[3] *Usikov Institute of Radiophysics and Electronics, Kharkiv, Ukraine.*
e-mail: ajn@kipt.kharkov.ua; a.j.nurmagambetov@gmail.com

NEW SOLUTIONS FOR KERR WITH MATTER

We construct solutions for the Kerr type rotating black hole with non-trivial matter in flat and (A)dS backgrounds. Symmetry arguments and singularity analysis in the proposed black hole models make it possible to fix the free parameters of the solutions; the energy conditions constraint configuration and field content of external matter. As a result, we establish a special type singularity in the north and south pole directions, generating the bipolar outflow of particles from black holes. We briefly discuss the extension of the proposed construction to the Vaidya and Kerr-Vaidya type black holes, and properties of the solutions.
Key words: Kerr-Vaidya black holes, Newman-Janis algorithm, energy conditions

1 Introduction

The discovery by Kerr of a new type of solutions of Einstein's vacuum equations [1] has raised a number of fundamental questions about the mechanisms of formation of rotating black holes. Perhaps, the central question about the sources of the final in its evolution stationary configuration of a rotating black hole without matter fields was raised by Kerr [1]; other important questions were collected by Krasinski in [2]. In what follows we will focus on two of them, viz. (cf. Ref. [2]): "i) Identifying possible sources by investigation of singularities and physical interpretation of parameters of the Kerr metric; ii) Eliminating some types of sources due to contradictions or inconsistencies to which they lead."

To figure out possible answers to points "i)" and "ii)", we will revise the original Kerr construction and will extend it to a series of solutions for rotating black holes surrounded by matter. The construction of the metric of a rotating black hole is traditionally based on the use of the seed metric for a static black hole with the subsequent application of either the standard Newman-Janis algorithm [3] or its generalizations [4–6] and modifications [7]. A less traditional way is to use ellipsoidal coordinates, which are more adapted to describe a freely rotating elastic body. The latter approach has been used in a number of works oriented at the attempt to construct more general Kerr-type solutions, that could shed light on the ways of resolving the problems mentioned by Krasinski. (See, e.g., Refs. [8] and [9] in this respect. Some progress for the Kerr-type solution with matter fields has been also achieved in Refs. [10,11].) The present work intensively uses the approach of Ref. [9], as well as symmetry properties of the Kerr solution underlying the choice of generalized solutions for rotating black holes with a non-trivial stress-energy tensor of matter. With respect to the symmetry properties of an axisymmetric solution to the Einstein equations our approach is ideologically close to the approach of [12]. However, we specify the unspecified functions in the solution of [12] using different energy conditions on the stress-energy tensor of matter.

These notes are organized as follows. In Section 2 we outline the procedure of getting new solutions to the Einstein equations corresponding to rotating black holes. We study geometric and dynamical properties of the proposed configurations, such as singularities of the metric, properties of the stress-energy tensor of matter, energy conditions on the matter fields, which allow us to fix the unfixed parameters of the solutions. In Section 3 we construct

the (A)dS generalization of the construction. Studies of non-stationary versions within the promoted here approach are outlined in Section 4. Brief discussion on the obtained results and our conclusions are collected in the last section.

2 Kerr type solution with matter fields: metrics, singularities and energy conditions

2.1 From a Deformed Ellipsoid to a Deformed Kerr

Let us briefly recap the main steps in the constructions of the Kerr metric, proposed in [9]. The line element of 4D Minkowski spacetime in the ellipsoidal coordinates has the following form:

$$ds_{4D}^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2+a^2}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi^2, \qquad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{2.1}$$

Or, one can present (2.1) as (2.2)

$$ds_{4D}^2 = -A\left(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2 + \frac{1}{A}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)d\varphi - a dt\right]^2, \tag{2.2}$$

so that, to match eqs. (2.1) and (2.2), A is fixed to be

$$A = \frac{r^2+a^2}{\rho^2}.$$

Then, as it was indicated in [9], the interval in (2.2) corresponds to the Kerr metric with zero black hole mass. Replacing A with

$$A(r,\theta) = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr,$$

we recover the standard Kerr metric in the Boyer-Lindquist coordinates.

Let's enhance the construction to include external matter. The requirement of having the symmetry under the inversion of φ angle leads to the following deformation of 3D Euclidean space [2],

$$ds_{3D}^2 = f^2(r,\theta)dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

which can be further generalized. Our proposal is to consider the following metric,

$$ds_{3D}^2 = e^{2W(r,\theta)}dr^2 + e^{2W(r,\theta)}\rho^2 d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi^2,$$

which also keeps the symmetry under the φ inversion. Then, following the formalism of [9], we get the following generalization of the metric (2.2):

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2 + \frac{\bar{\rho}^2}{\Delta}dr^2 + \bar{\rho}^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)d\varphi - a dt\right]^2 \tag{2.3}$$

Here

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

and

$$\bar{\rho}^2 = e^{2W(r,\theta)}\rho^2.$$

Having fixed the spacetime geometry by (2.3), we have to study the properties of matter compatible with such geometry.

2.2 The stress-energy tensor: general consideration and specifics

$$G_{mn} = 8\pi G T_{mn}.$$

Any stress-energy tensor T_{mn} of any type of relativistic matter can be presented in the form of

$$T_{mn} = (\mathcal{E} + P)\, u_m u_n + P g_{mn} + q_m u_n + q_n u_m + \tau_{mn}, \tag{2.4}$$

where, in the nomenclature of a viscous fluid, $\mathcal{E}$ and P are the energy and the pressure density, respectively; q_m is the momentum (heat) flux vector, and τ_{mn}, is the shear tensor. For the metric (2.3) the 4-velocity vector u_m becomes

$$u_m = \left(\sqrt{1 - \frac{2Mr}{\rho^2}}, 0, 0, \frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{2Mr}{\rho^2}}} \right), \qquad u^m u_m = -1.$$

Usually, in the representation (2.4) it is silently supposed that the pressure density is isotropic: we have the same value P in all directions. However, for the metric (2.3), the isotropy is lost. Hence, we are dealing with the stress-energy tensor (SET) of an anisotropic fluid, with different pressure densities in different directions:

$$T_{mn} = (\mathcal{E} + P)\, u_m u_n + P g_{mn} + (P_\theta - P)\, g_{\theta\theta} + (P_\varphi - P)\, g_{\varphi\varphi}.$$

The explicit form of the constituents in this SET can be found in Ref. [13]. We have to emphasize that this simple representation of the SET is not common; it becomes possible upon demanding $G_{r\theta} = 0$, which constraints the still unconstrained deformation function. Hence, we need to analyze possible solutions to this equation.

2.2 Fixing the deformed Kerr solution

As we have noted, the deformation function $W(r,\theta)$ is fixed by the requirement of the stress-tensor to be that of an anisotropic relativistic fluid. It is achieved with solving for the following equation on the deformation function:

$$\frac{r - M}{\Delta(r)} \partial_\theta W(r,\theta) + \cot\theta\, \partial_r W(r,\theta) = 0. \tag{2.5}$$

The general solutions to eq. (2.5) is

$$W(r,\theta) = W_1(r,\theta) + W_2(r,\theta) = C_1 \ln\left(r_0 \Delta^{-1/2} \sin\theta \right) + C_2\, \Delta^{-l/2} \sin^l\theta. \tag{2.6}$$

Here $C_{1,2}$ and l are the integration and separation constants, respectively; r_0 is some parameter with the dimensionality of length. To fix all, but r_0, parameters of the solution, we will use the assumption of the same, or almost the same, types of singularities for the generalized metric as for the standard Kerr metric. Hence, we have to compute the Kretschmann scalar for the metric (2.3) with the deformation function (2.6) to explore singularities of our model in dependence on different choices of the integration and separation constants.

Following this way (see Ref. [13] for details), we arrive at the following general form of the line element for a rotating black hole immersed in external matter:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2 + \frac{\exp\left(\frac{2\tilde{C}_2 r_0^l \sin^l\theta}{\Delta^{l/2}}\right)\rho^2 (r_0\sin\theta)^{2C_1}}{\Delta^{1+C_1}} dr^2$$
$$+ \frac{\exp\left(\frac{2\tilde{C}_2 r_0^l \sin^l\theta}{\Delta^{l/2}}\right)\rho^2 (r_0\sin\theta)^{2C_1}}{\Delta^{C_1}} d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)d\varphi - a\,dt\right]^2;$$
$$C_1 \geq 0, \qquad \tilde{C}_2 \geq 0, \qquad C_1 + \tilde{C}_2 \neq 0, \qquad l = -2n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

In (2.7) $\tilde{C}_2 = C_2 r_0^l$, and the character of this solution is such that it preserves the symmetry and singularity properties of the standard Kerr, with one exception. Namely, there are other points of singularity (see [13]), located at the north and south poles of the black hole. Moreover, depending on the choice of the deformation function, this additional singularity of the metric can be pronounced (as for the solution with the deformation function (2.6) with trivial integration constant C_2) or smoothed (exponentially suppressed as for a solution with the deformation function (2.6), in which C_1 is equal to zero). For the general type metric (2.7) the additional singularity is smoothed, as it follows from the detailed analysis performed in [13]. The exponential suppression at the points of additional singularity results in a near-zero value of the Kretschmann scalar there. It means that gravity is weak at the north and south poles, and particles from the black hole ergoregion may freely escape the black hole in the north and south pole directions, forming a well-known picture of outgoing jets. However, we need to be sure that the included in the construction external matter is physical, and does not suffer from different pathologies.

2.3 NEC, WEC, SEC, DEC and FEC

We want to check the standard requirements on the stress-energy tensor of matter for the established solution (2.7).

For the null energy condition (NEC) we have

$$T_{mn} l^m l^n \geq 0,$$

where l^m is one of two null-vectors for the geometry with metric (2.3) (or (2.7)). The analysis shows [13] that the NEC is violated in the vicinity of and far from the black hole, turning to zero at the radial infinity. However, the NEC is not a reliable condition in verifying the physicality of matter fields.

Next, let's take a look at the weak energy condition (WEC). This condition is (with the introduced 4-velocity vector u_m)

$$\mathcal{E} = T_{mn} u^m u^n \geq 0.$$

We will verify the WEC for the following set of the parameters: $C_1 = 1$, $C_2 = 1/r_0$, $l = -2$. (Note that the qualitative analysis of the energy conditions does not strongly depend on the choice of the admissible parameters in (2.7).) Here we have

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi G r_0^2 \rho^2 \sin^6\theta}\exp\left(-\frac{2\Delta}{r_0^2\sin^2\theta}\right)\left[\left(\left(M^2-a^2\right)\sin^2\theta - \Delta\right)r_0^2 + 4\Delta^2\right.$$
$$\left. + 2\Delta\left(\Delta + \left(M^2-a^2\right)\sin^2\theta\right)\right]. \tag{2.8}$$

Apparently, that the energy density (2.8) remains non-negative once we constrain the r_0 parameter as

$$r_0^2 \geq (6\Delta^2 + 2\Delta(M^2 - a^2)\sin^2\theta)/(\Delta - (M^2 - a^2)\sin^2\theta),$$

and the radial location of the accretion disk particles are restricted by

$$\Delta > (M^2 - a^2) \quad \rightsquigarrow \quad r_\pm > M \pm \sqrt{2(M^2 - a^2)}.$$

However, for configurations of truly physical fields, when fields form the so-called marginally bound circular orbits, the latter inequality always holds. (We refer the reader to Ref. [13] for the details.)

The strong energy condition (SEC),

$$\left(T_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}T\right)u^m u^n \geq 0,$$

satisfies everywhere in the outer, w.r.t. the black hole horizon, space, since the l.h.s. of this inequality is equal to zero.

The other popular energy condition is the dominant energy condition (DEC), which states that the vector $T_{mn}u^m$ has to be a time-like vector. Since this condition is weak in compare to the other ones, it is better to use either NEC, WEC and SEC, or possible alternate, and more physically relevant, energy conditions.

We check the flux energy condition (FEC), which was proposed in the cosmological context and ruled out the possibility of tachyonic matter. This condition reads $T_{mn}\xi^n$ is causal (that is, time-like or null) for any time-like vector ξ^m (which, in our case, can be chosen to be u^m), or, equivalently,

$$T_{mn}T^m{}_k u^n u^k \leq 0.$$

With the restrictions from eq. (2.7), this condition is satisfied everywhere in the outer, w.r.t. the black hole horizon, space.

Thus, we have constructed the solution to Einstein equations for a rotating black hole in the presence of external matter. It has been found conditions and constraints on the solution parameters leading to a physically viable stress-energy tensor satisfying most popular energy conditions. In the next sections we will generalize the found solution to the case of constant curvature spaces, which play an important role in Cosmology and Holography, and to non-stationary rotating black holes.

3 (A)dS generalization of the deformed Kerr

The proposed extension to (A)dS space is of the form

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2}\left(dt - \frac{a\sin^2\theta d\varphi}{\Xi}\right)^2 + \frac{\bar{\rho}^2}{\Delta_r}dr^2 + \frac{\bar{\rho}^2}{\Delta_\theta}d\theta^2$$
$$+ \frac{\Delta_\theta \sin^2\theta}{\rho^2}\left(adt - \frac{(r^2 + a^2)d\varphi}{\Xi}\right)^2, \qquad \bar{\rho}^2 = e^{2W(r,\theta)}\rho^2.$$

Here

$$\Delta_r = \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)(r^2 + a^2) - 2Mr, \qquad \Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{L^2}\cos^2\theta$$
$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Xi = 1 - \frac{a^2}{L^2},$$

Straightforward computations show that the line element (3.21) solves the Einstein equations with a cosmological constant

$$G_{mn} + g_{mn}\Lambda = 8\pi G T_{mn}$$

and, in order to reduce the stress-energy tensor of matter to that of an anisotropic relativistic fluid, it is necessary to fix the deformation function as

$$\left(L^2(r-M) + r(2r^2+a^2)\right)\Delta_\theta \partial_\theta W + \Delta_r\left(\Delta_\theta L^2 + a^2\sin^2\theta\right)\cot\theta\,\partial_r W = 0.$$

Solving for the latter equation, we get

$$W(r,\theta) = C_1 \operatorname{arccosh}\left[-\frac{1}{\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}\left(\frac{\Delta_r^2}{4r_0^2} + r_0^2 - r_0^2\cos^2\theta\left(\Delta_\theta + \frac{a^2}{L^2}\right)\left(1+\Delta_\theta\sin^2\theta\right)\right)\right]$$
$$+C_2\left(\frac{\sin^2\theta\Delta_\theta}{\Delta_r}\right)^{\frac{1}{2}L^2 l}.$$

Concerning the choice of the unconstrained constants $C_{1,2}$ and l in the obtained expression for the deformation function, the first two are fixed from the requirement of smooth zero cosmological constant limit. Roughly speaking, the deformation function for a small cosmological constant almost coincides with the deformation function in the flat spacetime. The additional requirement on the separation constant l to be negative and even naturally follows from a more accurate analysis of this limit performed in Ref. [13].

4 Vaidya and Kerr-Vaidya type black holes surrounded by matter

To extend our construction to the Kerr-Vaidya black holes, we have to generalize first the standard Vaidya metric. Our proposal is based on the following metric

$$ds^2 = -\mathcal{F}(v,r)dv^2 + 2e^{W(v,r,\theta)}dvdr + r^2 e^{2W(v,r,\theta)}d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \qquad (4.1)$$
$$\mathcal{F}(v,r) = 1 - \frac{2M(v)}{r}.$$

Here the deformation function W depends also on a temporal (in the Eddington-Finkelstein null coordinates) coordinate v, and the mass of the black hole becomes a function of this in-going coordinate. It is a straightforward exercise to convince yourself in the complete structure of the stress-energy tensor (cf. eq. (2.4)) for a viscous relativistic fluid in the case. The explicit expressions for the stress-energy tensor (2.4) constituents are given in Ref. [13], together with the analysis of the energy conditions.

Without going into details (see Ref. [13] in this respect), studying properties of non-trivial external matter from the point of view of different energy conditions revealed an additional interesting point. Viz., the field composition of the accretion disk should include only massive physical fields. Note, however, that this restriction concerns only (conditionally) stable closed orbits of particles in the angular direction $\theta = \pi/2$, and is not a general provision.

To construct the Kerr-Vaidya generalization of the promoted here construction we will use the standard algorithm by Newman and Janis [3]. Following this technique, one may recover the following generalization of the Vaidya metric to rotating black holes:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(v)r}{\rho^2}\right)dv^2 + 2e^{W(v,r,\theta)}dvdr + e^{2W(v,r,\theta)}\rho^2 d\theta^2$$
$$+2a\sin^2\theta\left(-1 + e^{-W(v,r,\theta)}\left(1 - \frac{2M(v)r}{\rho^2}\right)\right)dvd\varphi - 2a\sin^2\theta drd\varphi \qquad (4.2)$$
$$+\sin^2\theta\left(\rho^2 + e^{-W(v,r,\theta)}a^2\sin^2\theta\left(2 - e^{-W(v,r,\theta)}\left(1 - \frac{2M(v)r}{\rho^2}\right)\right)\right)d\varphi^2.$$

Apparently, for the trivial deformation function W the just constructed line element turns into the well-known metric of the Kerr-Vaidya black hole [14]. And, as well as in the case of the generalized Vaidya black hole model, the new solution (4.2) corresponds to the configuration of a rotating black hole surrounded by matter fields.

Let's draw some qualitative conclusions on the configuration described by the metric (4.2). For instance, the stress-energy tensor of matter for this type solution will have the form of the full stress-energy tensor of a viscous fluid. Next, the conclusions on the energy conditions corresponding to the geometry of (4.2) will lead to corrections to the early established, for the geometry (4.1), constraints. These corrections will touch upon the matter fields quasi-stable trajectories location in the accretion disk plane, leaving nevertheless the conclusion on the accretion disk content unchanged. And extra singularities in the pole (north and south) directions can be expected to be preserved to some extent.

5 Conclusions

To sum up, we have outlined the strategy in constructing different solutions to the Einstein equations for rotating and non-rotating black holes in the environment of matter fields. This type of solutions can be considered as an initial or intermediate stage of black hole formation, the final result of which is either complete absorption of matter by the black hole or creation of a quasi-stable configuration of the black hole with an accretion disk of external matter.

Verifying the singularities of the constructed metric, we have observed the important difference with respect to the standard Kerr solution. Specifically, in addition to the singularity of the Kerr solution, there are other points of singularity in our model, located in the north and south pole directions. In dependence on the choice of the deformations function, this additional singularity of the metric can be pronounced or smoothed by the exponential suppression. But even in the case when the additional singularity is smoothed, the exponential suppression in the corresponding directions results in a near-zero value of the Kretschmann scalar. Gravitational field becomes weak at the north and south poles, and particles from the black hole ergoregion may freely escape the black hole, forming a well-known picture of the bipolar outflow.

To fix the free parameters of the considered metric we have applied various popular energy conditions on the stress-energy tensor of matter required for the viability of our model. We observed that the most of the energy conditions, including the weak and strong energy conditions important in astrophysics, can be satisfied, so that the matter fields of the accretion disk around the black hole do not suffer from pathologies. As a by-product of our studies, we have verified the viability of the construction in the case of (A)dS space.

We have also proceeded with extending the approach to the non-stationary case of the Kerr-Vaidya black holes, and have performed a brief qualitative analysis of the solution properties. Here we have observed several interesting points. For instance, in the null (Eddington-Finkelstein) coordinates, needed in the construction, the stress-energy tensor of matter becomes the complete tensor of a viscous fluid, and the field composition of the accretion disk should include only massive physical fields. The latter requirement, following from the analysis of the energy conditions, concerns only (conditionally) stable closed orbits of particles in the equatorial plane, and is not a general provision. That is, the orbits of photons are excluded in the accretion disk plane, but are admissible in other angle directions. We hope that our findings will be useful in studies of astrophysical black holes in a broad context, especially in the case, when the accretion disk of matter becomes an indispensable attribute.

5 Acknowledgements

The author is thankful to the Organizers of the "Lomsadze-100" event. The work was supported in part within the Cambridge-NRFU 2022 initiative "Individual research (developments) grants for researchers in Ukraine (supported by the University of Cambridge, UK)", project №2022.02/0052.

LIST OF REFERENCES

1. R.P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics // Phys. Rev. Lett. – 1963. – V. 11. – P. 237-238.
2. A. Krasinski. Ellipsoidal Spacetimes, Sources for the Kerr Metric // Annals Phys. – 1978. – V. 112. – P. 22-40.
3. E.T. Newman, A.I. Janis. Note on the Kerr spinning particle metric // J. Math. Phys. – 1965. – V. 6. – P. 915-917.
4. S.P. Drake, P. Szekeres. Uniqueness of the Newman-Janis algorithm in generating the Kerr-Newman metric // Gen. Rel. Grav. – 2000. – V. 32. – P. 445-458.
5. A.J. Keane. An extension of the Newman-Janis algorithm // Class. Quant. Grav. – 2014. – V. 31. – P. 155003.
6. H. Erbin. Janis–Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation // Gen. Rel. Grav. – 2015. – V. 47. – P. 19.
7. M. Azreg-Aïnou. Generating rotating regular black hole solutions without complexification // Phys. Rev. D. – 2014. – V. 90. – P. 064041.
8. B.D. Nikolic, M.R. Pantic. A Possible Intuitive Derivation of the Kerr Metric in Orthogonal Form Based On Ellipsoidal Metric Ansatz// Preprint [arXiv:1210.5922 [gr-qc]].
9. N. Dadhich. A novel derivation of the rotating black hole metric // Gen. Rel. Grav. – 2013. – V. 45. – P. 2383-2388.
10. H. C. Kim, B. H. Lee, W. Lee and Y. Lee. Rotating black holes with an anisotropic matter field // Phys. Rev. D. – 2020. – V. 101. – P. 064067.
11. A.J. Nurmagambetov, I.Y. Park. Quantum-Gravitational Trans-Planckian Radiation by a Rotating Black Hole // Fortsch. Phys. – 2021. – V. 69. – P. 2100064.
12. R. Konoplya, L. Rezzolla and A. Zhidenko. General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity // Phys. Rev. D. – 2016. – V. 93. – P. 064015.
13. A.J. Nurmagambetov. Studying KARMA (Kerr and Relativistic Matter Around) // Prepring [arXiv:2411.07852 [hep-th]].
14. P.K. Dahal, D.R. Terno. Kerr-Vaidya black holes // Phys. Rev. D. – 2020. – V. 102. – P. 124032.

О. Нурмагамбетов[1,2,3]
[1] *Інститут теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ, Харків, Україна.*
[2] *ННІ «ФТФ», Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна.*
[3] *Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова, Харків, Україна.*
e-mail: ajn@kipt.kharkov.ua; a.j.nurmagambetov@gmail.com

НОВІ РІШЕННЯ ДЛЯ ЧОРНИХ ДІР КЕРРА З МАТЕРІЄЮ

Побудовано розв'язки для обертальної чорної діри Керрівського типу з нетривіальною матерією у плоскому тлі та у просторі (Анти) де Сіттера. Симетрійні аргументи та аналіз сингулярностей у запропонованих моделях чорних дір фіксують вільні параметри розв'язків; енергетичні умови обмежують конфігурації та польовий зміст зовнішньої матерії. Встановлено сингулярності спеціального типу в напрямках північного та південного полюсів, які генерують біполярний відтік частинок з чорних дір. Коротко обговорюється розширення запропонованої конструкції на чорні діри типу Вайдя і Керра-Вайдя, а також властивості таких рішень.
Ключові слова: чорні діри Керра-Вайдя, алгоритм Ньюмана-Яніса, енергетичні умови

Victor Christianto* & Florentin Smarandache**
**Malang Institute of Agriculture, East Java, Indonesia.*
e-mail: victorchristianto@gmail.com
***Dept. Mathematics and Sciences, University of New Mexico, Gallup, NM,*
e-mail: smarand@unm.edu

THREE NOVEL APPROACHES TO DEEP SPACE / INTERSTELLAR TRAVEL THAT TRANSCEND THE LIMITATIONS IMPOSED BY THE ROCKET EQUATION

At the time of writing this article, we read that there is strange behavior of Betelgeuse star in the last few days. While there are various explanations and interpretations on how that event would have impact to this Earth's inhabitants, our interpretation is that there is a number of chain of stars that act to lock this Earth to 3D realm, and the strange behavior of Betelgeuse star can be considered as a signal from heaven that we, all Earth inhabitants, are allowed to be transformed and elevated to 5D consciousness and to explore the Deep Space beyond this solar system. Therefore, in the present paper, it is considered three novel approaches to Deep Space / interstellar travel that transcend the limitations imposed by the Tsiolkovsky rocket equation. Among other things, we explore the possibility of utilizing macro-quantum tunneling as an alternative propulsion method. By inducing a state of quantum coherence in a macroscopic object, it is theorized that it could tunnel through barriers, bypassing the need for conventional propulsion systems. Furthermore, we investigate the potential role of spin supercurrents in facilitating this process. The paper delves into the theoretical underpinnings of macro-quantum tunneling and spin supercurrents, discussing the challenges and prospects associated with their application to space travel.

Keywords: 5D consciousness, Betelgeuse star, macroquantum tunneling, alternative propulsion methods, Deep Space travel

Introduction: Limitations of Tsiolkovsky equation

In the past decades, there are growing interests in novel approach beyond existing technologies, especially to explore the Deep Space and beyond [1][2][3]. In this regard, the Tsiolkovsky rocket equation, a cornerstone of astronautics, provides a fundamental relationship between a spacecraft's initial mass, final mass, exhaust velocity, and the change in velocity it can achieve. While this equation has been instrumental in numerous space missions, it also presents inherent limitations that hinder our ability to explore the vast expanse of the universe.[1]

One significant limitation of the Tsiolkovsky equation is the requirement for carrying propellant. The more propellant a spacecraft carries, the heavier it becomes, necessitating even more propellant to accelerate that increased mass. This creates a feedback loop that limits the maximum achievable velocity. As a result, long-duration missions to distant destinations, such as Mars or beyond, become increasingly challenging and resource-intensive.

Another constraint imposed by the Tsiolkovsky equation is the need for high exhaust velocities. To achieve significant changes in velocity, a spacecraft must expel propellant at very high speeds. This often necessitates the use of highly energetic propellants, which can be difficult to store, handle, and transport. Furthermore, the high temperatures and pressures associated with these propellants can introduce structural and safety concerns.

In addition to these limitations, the Tsiolkovsky equation does not account for external factors that can influence a spacecraft's trajectory. Gravitational fields from celestial bodies, atmospheric drag, and solar radiation pressure can all affect a spacecraft's velocity and trajectory, making it challenging to accurately predict and control its path.

To overcome these limitations and explore new frontiers of space exploration, it is imperative to develop alternative propulsion methods that transcend the constraints imposed by the Tsiolkovsky equation. This paper will delve into one such promising approach: macroquantum tunneling. By harnessing the principles of quantum mechanics, we may be able to develop propulsion systems that enable spacecraft to travel vast distances without the need for conventional propellants or high exhaust velocities.

Results

A. An alternative to Tsiolkovsky equation: towards macroquantum tunneling/EPR bridge

The Tsiolkovsky rocket equation, a cornerstone of astronautics, provides a fundamental relationship between a spacecraft's initial mass, final mass, exhaust velocity, and the change in velocity it can achieve. While this equation has been instrumental in numerous space missions, it also presents inherent limitations that hinder our ability to explore the vast expanse of the universe.

One promising avenue for overcoming these limitations lies in the realm of quantum mechanics. Specifically, the concept of **macroquantum tunneling** offers the intriguing possibility of bypassing the constraints imposed by the Tsiolkovsky equation. This phenomenon involves the quantum mechanical tunneling of a macroscopic object through a potential energy barrier.

To better understand the implications of macroquantum tunneling for space travel, it is instructive to recall the profound experiments conducted in laboratories involving **superfluids** and **superconductors**. These materials exhibit remarkable quantum properties at low temperatures, including the ability to flow without resistance and to exhibit macroscopic quantum coherence.

In superfluids, atoms can behave collectively as a single quantum entity, exhibiting phenomena such as quantization of circulation and superfluidity. These properties arise from the Bose-Einstein condensation of the atoms, which leads to a macroscopic wave function. In superconductors, electrons form Cooper pairs, which can also behave as a single quantum

entity. This leads to the phenomenon of superconductivity, where electric current can flow without resistance.

The experiments conducted with superfluids and superconductors have demonstrated the possibility of observing macroscopic quantum phenomena in laboratory settings. These experiments have provided valuable insights into the behavior of quantum systems at the macroscopic scale and have laid the groundwork for exploring the potential applications of quantum mechanics in fields such as quantum computing and quantum communication.

One potential application of macroquantum tunneling is in the realm of space travel. By inducing a state of quantum coherence in a macroscopic object, it may be possible to cause it to tunnel through spacetime barriers, bypassing the need for conventional propulsion systems. This could enable spacecraft to travel vast distances without the constraints imposed by the Tsiolkovsky equation.

While the realization of macroquantum tunneling for space travel remains a challenging and speculative endeavor, the experiments conducted with superfluids and superconductors provide a foundation for exploring this possibility. By understanding the principles governing the behavior of quantum systems at the macroscopic scale, we may be able to develop novel propulsion technologies that could revolutionize space exploration.

Detecting Macroquantum Tunneling: Near-Field Physics and Spin Supercurrents

Following the aforementioned arguments concerning to possibility of macroquantum tunneling to be considered in lab setting, we already discussed small scale experiments; while our results are not quite convincing in regard to traversability, what we reported actually concerning plausible quantum tunneling simulation for iced-water with simple measurement devices [4, 5].

More than that, the detection of macroquantum tunneling, the phenomenon where a macroscopic object tunnels through a potential energy barrier, presents a significant challenge due to its inherently quantum nature. However, recent advances in near-field physics and the study of spin supercurrents offer promising avenues for overcoming these obstacles.[7]

Near-Field Physics

Near-field physics, which deals with the interaction of objects separated by distances on the nanometer scale, provides powerful tools for probing quantum phenomena. Techniques such as atomic force microscopy (AFM) and scanning tunneling microscopy (STM) can be used to measure the forces and currents acting between a probe tip and a sample surface with unprecedented sensitivity.[6]

By using these techniques, researchers can potentially detect the presence of a macroscopic object that has tunneled through a barrier. For example, if a macroscopic object were to tunnel through a barrier and appear on the other side, it would likely perturb the local environment.

This perturbation could be detected using near-field techniques, providing evidence of the tunneling event.

Spin Supercurrents

Another promising approach to detecting macroquantum tunneling involves the study of spin supercurrents, cf. our article at [6]. These are currents of spin-polarized electrons that can flow without resistance in certain materials, such as topological insulators. Spin supercurrents are highly sensitive to external magnetic fields and can be used to probe the quantum state of a system.

By coupling a macroscopic object to a spin supercurrent, researchers may be able to detect the effects of quantum tunneling. For example, if a macroscopic object were to tunnel through a barrier, it could alter the magnetic environment of the spin supercurrent. This change could be detected by measuring the properties of the spin supercurrent, providing evidence of the tunneling event.

Hartman effect / estimation of tunneling time

Quantum tunneling, a phenomenon where particles can penetrate through barriers that they classically shouldn't be able to, is a cornerstone of quantum mechanics. A particularly intriguing aspect of this phenomenon is the **Hartman effect**, which suggests that the tunneling time, the time it takes for a particle to traverse a potential barrier, is largely independent of the barrier's width. This seemingly counterintuitive observation has been a subject of much debate and experimentation in the quantum physics community.

The Experiment

To understand the Hartman effect, consider a simple experiment. A particle, such as an electron, is fired towards a potential barrier. Classically, the particle would need to have sufficient energy to "climb" over the barrier to reach the other side. However, in the quantum world, there's a finite probability that the particle will tunnel through the barrier, even if it doesn't have enough classical energy.

Early experiments found that the tunneling time seemed to be roughly the same, regardless of the barrier's width. This was surprising because one might expect that a wider barrier would require more time for the particle to traverse. The Hartman effect suggested that the particle was somehow "pre-existing" on the other side of the barrier and was simply "appearing" there without spending time within the barrier.

The Hartman effect has sparked considerable debate among physicists. Some argue that the effect is a genuine quantum phenomenon, reflecting the non-classical nature of tunneling. Others suggest that the apparent independence of tunneling time on barrier width is an artifact of the measurement process or a result of how tunneling time is defined.

One of the challenges in studying the Hartman effect is defining tunneling time itself. In classical physics, time is a well-defined quantity. However, in the quantum world, it's not always straightforward to measure the time it takes for a particle to traverse a barrier. Different methods of measuring tunneling time can yield different results, making it difficult to reach a definitive conclusion.

In the context of Josephson junctions, this would imply that the time it takes for Cooper pairs to tunnel across the junction is relatively constant, regardless of the junction's thickness.

Using the OR Theorem

a. The OR theorem, a foundational result in quantum mechanics, can be utilized to provide a framework for analyzing tunneling times. While the exact details of applying the OR theorem to Josephson junctions might be complex, we can outline a general approach using Mathematica.

Steps Involved:

1. **Define the Potential Barrier:** We'll consider a simple rectangular potential barrier:
   - potential[x_] := Piecewise[{{0, x < 0}, {V, 0 <= x <= a}, {0, x > a}}]
2. **Set Up the Time-Dependent Schrödinger Equation:** We'll use the time-dependent Schrödinger equation to describe the evolution of the wave function:
   - i*h* D[ψ[x, t], t] == -*h*^2/(2m) D[ψ[x, t], {x, 2}] + potential[x] ψ[x, t]
3. **Specify Initial Wave Function:** We'll use a Gaussian wave packet as the initial wave function
   - ψ[x, 0] := Exp[-(x - x0)^2/(2 σ^2)] Exp[I p0 x/*h*]
4. **Apply the OR Theorem:**
   - Implement the OR theorem to extract the tunneling time. This typically involves analyzing the probability amplitude for the system to be in a particular state after a certain time.
   - To calculate the tunneling time, we can track the center of the wave packet as it moves through the barrier. The time it takes to traverse the barrier can be considered the tunneling time.

Mathematica code (outline only):

Mathematica

```
(* Define parameters *)
h = 1;
m = 1;
V = 10;
a = 5;
x0 = -10;
```

```
σ = 2;
p0 = 1;
(* Define the potential and initial wave function *)
potential[x_] := Piecewise[{{0, x < 0}, {V, 0 <= x <= a}, {0, x > a}}]
ψ[x, 0] := Exp[-(x - x0)^2/(2 σ^2)] Exp[I p0 x/ħ]
(* Set up the time-dependent Schrödinger equation *)
eq = I h D[ψ[x, t], t] == -h ^2/(2 m) D[ψ[x, t], {x, 2}] + potential[x] ψ[x, t];
(* Numerical solution (adjust parameters as needed) *)
sol = NDSolve[{eq, ψ[x, 0] == ψ[x, 0]}, ψ[x, t], {x, -20, 20}, {t, 0, 20},
        Method -> "MethodOfLines",
        "SpatialDiscretization" -> {"TensorProductGrid", "MinPoints" -> 200}]
(* Visualize the wave function evolution *)
Animate[Plot[Abs[ψ[x, t] /. sol]^2, {x, -20, 20}, PlotRange -> All], {t, 0, 20}]
(* Calculate tunneling time (approximate method) *)
(* ... (Track the wave packet's center and measure the time it takes to traverse the
barrier) ... *)
```

b. Provided we are allowed to hypothesize that the aether medium is composed of quasicrystalline tessellation [11], [12] or something like crystalline phase of iced-water as we discussed previously, we may consider an alternative way to come up with Hartman tunneling time estimate.

The concept of an aether medium, once prevalent in physics, has largely been superseded by the theory of relativity. However, for the purpose of this hypothetical exercise, let's assume that the aether is composed of a quasicrystalline tessellation.

Challenges in Modeling a Quasicrystalline Aether

While Mathematica is a powerful tool for numerical simulations and symbolic calculations, modeling a quasicrystalline aether within the framework of quantum mechanics presents several challenges:

1. **Quasicrystalline Structure:** Quasicrystals have unique properties, such as aperiodic order and rotational symmetry without translational symmetry. Incorporating these features into a quantum mechanical model requires specialized techniques.
2. Define the Quasicrystalline Potential:
   potential[x_] := V0 (1 + Cos[2 π x/λ1] + Cos[2 π x/λ2]),
   where V0 is the potential amplitude, and λ1 and λ2 are incommensurate periods, creating a quasicrystalline structure.
3. Set Up the Time-Dependent Schrödinger Equation:
   This remains the same as in the previous
   i*h* D[ψ[x, t], t] == -*h*^2/(2m) D[ψ[x, t], {x, 2}] + potential[x] ψ[x, t]
4. Specify Initial Wave Function:

ψ[x, 0] := Exp[-(x - x0)^2/(2 σ^2)] Exp[I p0 x/*h*]

5. **Interaction with Matter:** Defining how a quasicrystalline aether would interact with matter, particularly in the context of a Josephson junction, is a complex task. The nature of the interaction could significantly influence the tunneling behavior.
6. **Quantum Mechanical Formulation:** Translating the concept of a quasicrystalline aether into a quantum mechanical formalism might require new theoretical frameworks or modifications to existing ones.

Mathematica code (outline only):

(* Define parameters *) *h* = 1; m = 1; V0 = 10; λ1 = √2; λ2 = √3; x0 = -10; σ = 2; p0 = 1; (* Define the quasicrystalline potential *) potential[x_] := V0 (1 + Cos[2 π x/λ1] + Cos[2 π x/λ2]) (* Set up the time-dependent Schrödinger equation *) eq = I *ħ* D[ψ[x, t], t] == -*h*^2/(2m) D[ψ[x, t], {x, 2}] + potential[x] ψ[x, t]; (* Numerical solution (adjust parameters as needed) *) sol = NDSolve[{eq, ψ[x, 0] == ψ[x, 0]}, ψ[x, t], {x, -20, 20}, {t, 0, 20}, Method -> "MethodOfLines", "SpatialDiscretization" -> {"TensorProductGrid", "MinPoints" -> 200}] (* Visualize the wave function evolution *) Animate[Plot[Abs[ψ[x, t] /. sol]^2, {x, -20, 20}, PlotRange -> All], {t, 0, 20}] (* Calculate tunneling time (approximate method) *) (* ... (Track the wave packet's center and measure the time it takes to traverse the barrier) ... *)

Considerations and Further Exploration:

- **Quasicrystal Structure:** The specific choice of incommensurate periods will significantly impact the tunneling behavior. Experiment with different values to observe varying effects.
- **Aether Medium:** While the concept of an aether medium is a subject of debate, modeling the medium as a quasicrystalline structure can provide insights into potential quantum effects.
- **Quantum Field Theory:** For a more rigorous treatment, consider using quantum field theory to describe the interaction between particles and the quasicrystalline medium.
- **Numerical Techniques:** The accuracy of the simulation depends on the numerical method used. Experiment with different methods (e.g., finite difference, finite element, spectral methods) to optimize performance.

By simulating the Hartman effect in a quasicrystalline aether medium, we can gain a deeper understanding of quantum tunneling and explore the potential implications for advanced technologies and fundamental physics.

Note:

While this hypothetical code provides a starting point, it's important to emphasize that modeling the interaction between a quasicrystalline aether and a Josephson junction within a

quantum mechanical framework is a complex and challenging problem. Significant theoretical and computational advancements would be required to develop a realistic and accurate model.

B. Another alternative method to Deep Space travel with non-orientable wormhole/tunneling

While traditional wormhole theories often involve complex mathematical models and exotic matter, recent research has explored a more tangible approach: the manipulation of physical structures to induce wormhole-like effects.

A Möbius strip, a simple geometric object with only one side and one edge, offers a fascinating analogy for understanding non-orientable spacetime. By twisting a strip of paper and connecting its ends, one creates a surface that defies conventional notions of orientation.

b.1. Crystal-Induced Wormholes: A Laboratory Experiment

Researchers Hayashi and Ebisawa have proposed a groundbreaking hypothesis: that certain crystals, under specific conditions, could exhibit properties akin to a Möbius strip at the quantum level. By carefully manipulating the crystal's structure and applying external stimuli, it may be possible to induce a localized curvature of spacetime, creating a microscopic wormhole [cf. ref. 4, 5, 13, 14].

b.2. Superconductors: A Quantum Bridge

Superconductors, materials that exhibit zero electrical resistance at low temperatures, offer another intriguing avenue for wormhole research. These materials can facilitate quantum tunneling, a phenomenon where particles can seemingly pass through barriers. By harnessing the unique properties of superconductors, scientists may be able to manipulate spacetime on a macroscopic scale, potentially opening up wormhole-like passages.

Challenges and Future Directions

While the prospect of wormhole travel is undeniably exciting, significant challenges remain:

- **Energy Requirements:** Generating and maintaining a stable wormhole would require immense amounts of energy, far beyond our current technological capabilities.
- **Exotic Matter:** The existence of exotic matter, a fundamental component of many wormhole theories, is still uncertain.
- **Control and Stability:** Controlling and stabilizing a wormhole would be a complex task, requiring precise manipulation of spacetime.

Despite these hurdles, continued research into crystal-induced and superconductor-mediated wormholes could revolutionize our understanding of the universe and pave the way for interstellar travel. By pushing the boundaries of physics and materials science, we may one day unlock the secrets of the cosmos and embark on journeys to distant star systems.

B. Utilizing similarity between brain neurons and galaxy clusters

The universe, with its intricate network of galaxies, stars, etc., has long captivated human imagination. As we delve deeper into the cosmos, we encounter questions about its origins,

evolution, and potential for future exploration. Recent research has revealed intriguing parallels between the structure of the universe and the human brain, suggesting that these two complex systems may share fundamental principles [cf. 16, 17].

Both the cosmic web and the human brain are characterized by complex networks of interconnected nodes. In the brain, neurons form intricate neural networks that enable cognitive functions, while in the cosmos, galaxies cluster together, forming vast cosmic structures.

- **Scale-Invariant Structures:** One striking similarity between these two systems is their scale-invariant nature. From the microscopic level of neurons to the cosmic scale of galaxy clusters, both exhibit fractal patterns, meaning that similar structures can be observed at different scales.
- **Quantum Effects:** Quantum mechanics, the physics of the very small, plays a crucial role in both systems. Quantum entanglement, for instance, allows particles to remain connected across vast distances, potentially influencing the behavior of both neurons and galaxies.

Harnessing the Cosmic Neural Quantum Effect

If we can harness the quantum effects that underlie the cosmic web, we may unlock new possibilities for deep space travel. By studying the way galaxies interact and communicate with each other, we may be able to develop novel propulsion systems or navigation techniques.

One potential application is the development of a "cosmic GPS" that utilizes the quantum entanglement of galaxies to precisely determine spacecraft positions. By measuring the quantum correlations between distant galaxies, we could create a highly accurate navigation system that would allow us to explore the universe with unprecedented precision.

Another intriguing possibility is the development of a "warp drive" that could exploit the curvature of spacetime to travel faster than the speed of light. By studying the way galaxies warp spacetime, we may be able to identify ways to manipulate this curvature to our advantage.

Challenges and Future Directions

While the idea of harnessing the cosmic neural quantum effect is still in its infancy, it represents a fascinating new frontier in scientific exploration. However, several challenges must be overcome before we can realize its full potential.

- **Technological Limitations:** Our current technology is not advanced enough to directly manipulate the quantum properties of the universe.
- **Theoretical Understanding:** We still have much to learn about the fundamental nature of quantum mechanics and its role in cosmic structures.

Despite these challenges, the potential rewards of this research are immense. By understanding the deep connections between the human brain and the cosmos, we may unlock the secrets of the universe and pave the way for a future of interstellar exploration.

Discussion: Challenges and Future Directions

Despite these promising approaches, detecting macroquantum tunneling remains a formidable challenge. The low probability of tunneling events, combined with the difficulty of controlling macroscopic objects at the quantum level, make direct observation difficult. However, by combining near-field physics, spin supercurrents, and other advanced techniques, researchers may be able to develop new methods for detecting and studying this elusive phenomenon.

Future research in this area will likely focus on developing more sensitive and precise measurement techniques, as well as exploring new materials and systems that may be more conducive to observing macroquantum tunneling. By addressing these challenges, scientists may be able to unlock the potential of this fascinating quantum phenomenon and pave the way for new applications in fields such as quantum computing and materials science.

One of quite fascinating thing with respect to macroquantum tunneling effect is that Hartman tunneling time will not vary much especially for large thickness of barrier, and even if we consider macroquantum tunneling in the context of ER=EPR bridge hypothesis, it probably would not involve too much time to pass the barrier to the edge of the EPR bridge (at least hypothetically). We discuss Hartman tunneling time in the following section.

As with the challenge to scale up from lab experiments on low temperature wormhole tunneling to prototype scale, allow us to suggest that Salvatore Pais's patent with title Piezoelectricity-induced high temperature superconductor, perhaps can be used as guideline to develop prototype-scale high temperature superconductor for that purpose. [cf. 15]

With regards to exploring possibility of non-orientable wormhole tunneling via crystals or superconductors, we admit there are certain great hurdles. Nonetheless, continued research into crystal-induced and superconductor-mediated wormholes could revolutionize our understanding of the universe and pave the way for interstellar travel. By pushing the boundaries of physics and materials science, we may one day unlock the secrets of the cosmos and embark on journeys to distant star systems.

Concluding remark

We have discussed in the present article, among other things that there are growing interests in novel approach beyond existing technologies, especially to explore the Deep Space and beyond [1][2][3]. In this regard, the Tsiolkovsky rocket equation, a cornerstone of astronautics, provides a fundamental relationship between a spacecraft's initial mass, final mass, exhaust velocity, and the change in velocity it can achieve. While this equation has

been instrumental in numerous space missions, it also presents inherent limitations that hinder our ability to explore the vast expanse of the universe.[1]

We also discussed possible advantage of utilizing macroquantum tunneling effect for instance what is known as Josephon junction, which can be considered a phenomenon well-observed in lab setting, including in various low temperature physics of superfluid and superconductor. One interesting feature is called Hartman effect, a known fact that Hartman tunneling time will not vary much especially for large thickness of barrier, and even if we consider macroquantum tunneling in the context of ER=EPR bridge hypothesis, it probably would not involve too much time to pass the barrier to the edge of the EPR bridge (at least hypothetically).

Provided we are allowed to hypothesize that the aether medium is composed of quasicrystalline tessellation [11][12] or something like crystalline phase of iced-water as we discussed previously, we may consider an alternative way to come up with Hartman tunneling time estimation, as well as in the usual time by defining quantum operator of time. [9][10]

Acknowledgment

Discussions with Robert N. Boyd, PhD., Prof Carlos Castro Perelman, PhD, and other physicists around the world are gratefully appreciated. Parts of this article along with Mathematica code outlines were written by assistance of a large language model; nonetheless ideas developed here are ours.

References

[1] Czysz, Paul A. & Bruno, Claudio. *Future spacecraft propulsion systems, 2nd edition*. Berlin: SPRINGER–PRAXIS BOOKS, 2009. ISBN 978-3-540-88813-0

[2] Woodward, James F. (ed). *Making Starships and Stargates*. New York: SPRINGER-PRAXIS BOOKS, 2013. ISBN: 978-1-4614-5622-3, DOI: 10.1007/978-1-4614-5623-0

[3] V. Christianto. Remark on the possibility of deep space travel to potentially habitable satellites, *AAOAJ*, July 2024. url: https://medcraveonline.com/AAOAJ/

[4] Christianto V., Chandra T.D., and Smarandache F. (**2023**). Godel, Escherian. Staircase and Possibility of Quantum Wormhole Liquid Crystalline Phase of Iced -Water - Part I: Theoretical Underpinning. *BPAS Chemistry Sciences,* Dec. 2023, url: https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1810&context=math_fsp

[5] Christianto V., Chandra T.D., and Smarandache F. (**2023**). Godel, Escherian. Staircase and Possibility of Quantum Wormhole Liquid Crystalline Phase of Iced -Water - Part II: Experiment description. *BPAS Chemistry Sciences,* Dec. 2023, url: https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1811&context=math_fsp

[6] Umniyati, Y., Christianto, V., Smarandache, F. (2022) A New Hypothesis of Spin Supercurrent as Plausible Mechanism of Biological Nonlocal Interaction, Synchronicity, Quantum Communication, *a book chapter in* **Intech Open** series, url: https://www.intechopen.com/chapters/81418

[7] Girard, C., Christian Joachim and Sebastien Gauthier. The physics of the near-field. *Rep. Prog. Phys*. 63 (2000) 893–938, PII: S0034-4885(00)90739-5

[8] Okozi, S.O., *et al*. Optimization of Energy using Vortex Coil Technology. *SSRG International Journal of Electrical and Electronics Engineering* Volume 10 Issue 8, 148-155, August 2023.

[9] Olkhovsky, V.S., Recami, E., Jakiel, J. (2001) UNIFIED TIME ANALYSIS OF PHOTON AND PARTICLE TUNNELLING. Report no. IC/2001/67; Available at: http://www.ictp.trieste.it/~pub-off

[10] Winful, H.G. (2006) Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality. Phys. Report 436 (2006)

[11] Voigt, L., Kubus, Pedersen (2020) Chemical engineering of quasicrystal approximants in lanthanide-based coordination solids, *Nature communications.* (2020) 11:4705 | https://doi.org/10.1038/s41467-020-18328-5 | www.nature.com/naturecommunications

[12] Dontabhaktuni, J., Ravnik, M., & Zumer (2023) Quasicrystalline tilings with nematic colloidal platelets, *PNAS*, February 18, 2014, vol. 111, no. 7 www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1312670111

[13] Hayashi, M. & H. Ebisawa. Little-Parks Oscillation of Superconducting Mobius Strip. https://arxiv.org/abs/cond-mat/0107492v1 (2001)

[14] P. Enriquez, R. A Structural Parameter for High Tc Superconductivity from an Octahedral Möbius Strip in RBaCuO:123 type Perovskites. From Researchgate.net

[15] Pais, Salvatore C. Piezoelectricity-induced high temperature superconductor. Google patent database: US 2019/0348597 A1 (2019)

[16] Vazza F & Feletti A (2020) The Quantitative Comparison Between the Neuronal Network and the Cosmic Web. *Front. Phys.* 8:525731. doi: 10.3389/fphy.2020.525731

[17] Ansel, Helen & Kovacs, Istvan. *Communications Physics* | (2024) 7:184, https://www.nature.com/articles/s42005-024-01665-y

[18] Ray P. Norris & Barnaby R. M. Norris. *Why are there Seven Sisters?* arXiv: 2101.09170v1 [physics.pop-ph]
[19] Randolph Winters. *Pleiades Mission*. Pleiades Project, 1994. ISBN: ISBN 1-885757-07-7

Віктор Крістіано* та Флорентін Смарандаке**
**Інститут сільського господарства Маланг, Східна Ява, Індонезія.*
e-mail: victorchristianto@gmail.com
***Відд. Математика та природничі науки Університет Нью-Мексико, Гелап, Нью-Мексико,*
e-mail: smarand@unm.edu

ТРИ НОВІ ПІДХОДИ ДО ГЛИБОКОГО КОСМОСУ МІЖЗОРЯНИХ ПОДОРОЖІВ, ЯКІ ВИХОДЯТЬ ЗА ОБМЕЖЕННЯ, НАКЛАДЕНІ РАКЕТНИМ РІВНЯННЯМ

Під час написання цієї статті ми читали про дивну поведінку зірки Бетельгейзе за останні кілька днів. Хоча існують різні пояснення та тлумачення того, як ця подія вплине на мешканців цієї Землі, наша інтерпретація полягає в тому, що існує кілька ланцюжків зірок, які діють, щоб замкнути цю Землю в 3D-сфері, і дивна поведінка зірки Бетельгейзе може бути розглядається як сигнал з небес про те, що нам, усім жителям Землі, дозволено трансформуватися та піднятися до 5D свідомості та досліджувати глибокий космос за межами цієї сонячної системи. Тому в цій статті розглядаються три нові підходи до глибокого космосу/міжзоряних подорожей, які виходять за межі обмежень, накладених ракетним рівнянням Ціолковського. Серед іншого, ми досліджуємо можливість використання макроквантового тунелювання як альтернативного методу руху. Встановлюючи стан квантової когерентності в макроскопічному об'єкті, існує теорія про те, що він може проходити тунель крізь бар'єри, обходячи потребу у звичайних системах руху. Крім того, ми досліджуємо потенційну роль спінових суперструмів у полегшенні цього процесу. У статті розглядаються теоретичні основи макроквантового тунелювання та спінових надструмів, обговорюються проблеми та перспективи, пов'язані з їх застосуванням у космічних подорожах.
Ключові слова: 5D свідомість, зірка Бетельгейзе, макроквантове тунелювання, альтернативні методи руху, подорож у глибокий космос

Ю. Ксаверій
Інститут електронної фізики НАН України

ПРОФЕСОР Ю.М. ЛОМСАДЗЕ – ФУНДАТОР УЖГОРОДСЬКОЇ ШКОЛИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У статті представлено інформацію-спогади про семінар, присвячений пам'яті професора Юрія Мелітоновича Ломсадзе − засновника фундаментальних наукових досліджень на фізичному факультеті УжНУ, професіонального фізика-теоретика,− який відбувся у 2006 році в Ужгородському національному університеті. Доповіді, представлені на цьому семінарі, не втратили своєї актуальності і зараз, зокрема, і в історичному плані.

Ключові слова: фізики високих енергій, квантова теорія, теорія поля, адрони, філософія фізики.

21 лютого 2006 року у Великій фізичній аудиторії на фізичному факультеті Ужгородського національного університету відбувся семінар, присвячений пам'яті професора Юрія Мелітоновича Ломсадзе.

Відкриваючи роботу семінару декан фізичного факультету УжНУ, завідувач кафедрою теоретичної фізики, професор В.Ю. Лазур сказав, що чим далі відходять у минуле 50-ті, 60-ті і 70-ті роки минулого століття, тим чіткіше вимальовується незаперечна роль Ю.М. Ломсадзе не тільки у створенні ужгородської школи теоретичної фізики, але і у формуванні, становленні і розвитку фізичної науки на Закарпатті.

В середині 50-тих років група молодих, талановитих і енергійних викладачів і вчених − Чепур Д.В., Запісочний І.П., Ломсадзе Ю.М., Шкода-Ульянов В.А., Братійчук М.В. − приїхали за направленням Міністерства освіти і науки в Закарпатську область, в Ужгородський державний університет. З цими іменами пов'язане фактичне народження і становлення фізичного факультету університету як осередка культури і підготовки спеціалістів вищої кваліфікації з фізики. А ім'я Ю.М. Ломсадзе у цьому списку безумовно є символом незвичайної, найбільш неординарної особистості, яка коли-небудь сяяла на небосхилі фізичної науки на Закарпатті.

Перший у програмі семінару доповідач − завідувач відділу теорії елементарних взаємодій Інституту електронної фізики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Михайло Іванович Гайсак − у лаконічній тезисній формі і з одночасною демонстрацією кольорових слайдів розповів про життя і творчий шлях Ю.М. Ломсадзе. Юрій Ломсадзе народився в місті Баку 14 грудня 1924 року. Мама Юри − потомствена козачка. Є у нього ще й рідна сестра. У післявоєнні роки вчився на фізичному факультеті Московського державного університету ім. М.І.Ломоносова. Наступний етап − навчання в аспірантурі Фізичного Інституту Академії наук СРСР ім. П.М. Лєбєдєва. Тут готується і успішно захищається кандидатська дисертація, в якій встановлюється сингулярний характер поведінки потенціалу взаємодії електромагнітного поля у вищих наближеннях ряду теорії збурень у квантовій електродинаміці. Ю.М.Ломсадзе вважав своїм вчителем академіка Мойсея Абрамовича Маркова, на ідеї і авторитет котрого часто посилається як в усних доповідях, так і у друкованих роботах. З 1955 по 1979 роки живе і працює в Ужгороді. Протягом 1955−1960 років Ю.М. Ломсадзе працює викладачем на кафедрі експериментальної і теоретичної фізики УжДУ. Навантаження у нього колосальне: читає лекції одночасно на всіх курсах факультету і з усіх теоретичних дисциплін. Паралельно веде і активну науково-дослідницьку роботу в області квантової електродинаміки і теорії елементарних частинок. З 1960-го року очолює створену ним кафедру теоретичної фізики.

У 1967 році успішно захищає докторську дисертацію, присвячену аналітичним властивостям амплітуди розсіювання. У 1968 році йому присвоєно вчене звання професора. У 1970-му році за підтримки професора М.М. Боголюбова створюється відділ теорії адронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР, завідувачем якого стає професор Ю.М. Ломсадзе. З цього моменту викладацька діяльність професора Ю.М. Ломсадзе відходить на другий план. А на передньому плані – науково-дослідницька робота, причому одночасно у декількох напрямках: аксіоматичні теорії квантових полів, аналітичні властивості амплітуди розсіювання і строгі обмеження на високоенергетичну поведінку амплітуди і перерізу розсіювання, застосування теорії груп до опису властивостей сильно взаємодіючих елементарних частинок − адронів, а також методологічні і філософські проблеми квантової фізики. Паралельно набирає ще більшого розмаху науково-організаційна робота з проведення Всесоюзних конференцій, шкіл і симпозіумів з квантової теорії поля і фізики високих енергій.

Ю.М. Ломсадзе − автор більше двохста наукових праць, опублікованих у вигляді журнальних статей і препринтів. Автор монографії «Теоретико-групповое введение в теорию элементарных частиц» і співавтор двох книг з філософії фізики.

Професор В.Ю. Лазур представив велику доповідь на тему «Квазікласичне наближення для рівняння Дірака зі скалярно-векторним зв'язком і його застосування у фізиці змішаних мезонів». Вчений вважає, що ця робота є продовженням досліджень професора Ю.М. Ломсадзе, оскільки виконана вона в рамках квантової теорії поля, тобто в рамках того напрямку, який заснував в Ужгороді саме професор Ю.М. Ломсадзе.

Доктор фізико-математичних наук, професор emeritus Іван Юрійович Кривський представив доповідь про методологічні проблеми квантової механіки і фізики взагалі, які глибоко хвилювали професора Ю.М. Ломсадзе. Згадав історію, яка сталася на одному з багаточисельних семінарів Ю.М. Ломсадзе, тому, де обговорювалися і проблеми теорії відносності. Юрій Мелітонович задав тоді сакраментальне питання: «Як можна перевірити правильність положень теорії відносності?». На перший погляд проблеми ніякої нема: кожна частинка забезпечується своїм локальним годинником, який показує власний час, а положення частинок фіксується лінійками, поділки на шкалах яких можуть бути як-завгодно малими; рівняння фізики дозволяють передбачити поведінку системи частинок у будь-якій точці чотиривимірного простору-часу. Але проблема все-таки є: в теорії поля навіть одна частинка ніби «розмита» по всьому простору-часу. Якщо з просторовими координатами все ясно, то зовсім не зрозуміло як бути з часовою змінною. Виходить так, що для отримання детальної інформації про локальний час необхідно створити годинники все менших і менших розмірів і спробувати розташувати їх як можна щільніше у просторі, а зрештою отримати … континуум локальних годинників! Тільки при такому граничному переході можливе правильне, адекватне трактування фундаментальних положень спеціальної і загальної теорії відносності. Однак, це практично неможливо реалізувати. Неможливо у принципі. Можна уявити собі ланцюжок щільно розташованих годинників надзвичайно малих розмірів. Можна навіть уявити собі, що прогрес техніки дозволить просування в напрямку переходу до годинників ще менших розмірів і до більш щільного їх розташування у просторі. Але дуже важко втриматися від питання: «Невже ці годинники не будуть заважати один одному? Невже вони не будуть давати суперечливі показники?».

У розповіді професора І.Ю. Кривського прозвучало ім'я Д.І. Блохінцева − автора відомого підручника з квантової механіки. Професор Ю.М. Ломсадзе категорично не погоджувався з інтерпретацією хвильової функції, згідно якій хвильова функція описує «ансамбль частинок» − теорією, прихильником якої був Д.І. Блохінцев. У свою чергу Д.І. Блохінцев різко критикував інтерпретації, запропоновані Ю.М.Ломсадзе.

Доцент Ужгородського національного університету Йосип Михайлович Шуба представив детальну інформацію про наукові дослідження на кафедрі теоретичної фізики у 1960 −1970 роках, тобто тоді, коли кафедру очолював Ю.М.Ломсадзе. Розповів і про такий вид діяльності професора Ю.М. Ломсадзе як популяризація надскладних проблем фізики на сторінках обласної преси. Написані простою і зрозумілою мовою, але прикрашені вишуканим стилем, ці статті користувалися незмінним успіхом у всіх, хто мав потяг до знань, і кого цікавили новини науки. Але за всі свої газетні статті професор Ю.М. Ломсадзе зрештою, образно кажучи, поплатився. Коли він опублікував на сторінках «Закарпатської правди» статтю, в якій обґрунтовувалася теза про те, що у природі можливі ефекти порушення закону збереження і перетворення енергії, −універсального, загального і всіма визнаного закону − то це викликало нападки на автора з боку деяких відповідальних осіб, причому у надзвичайно різкій формі.

Золтан Золтанович Торич з Інституту електронної фізики НАН України, в якому він, до речі, обіймав посаду вченого секретаря, адресував свій виступ не стільки старшому поколінню фізиків, скільки тим студентам-фізикам, яким тільки належить обрати собі конкретну спеціальність на завершальному етапі навчання в університеті. В далекому 1964 році він брав участь в олімпіаді з фізики, яка відбувалася в Мукачеві. І на цій олімпіаді став переможцем. Так ось там, на тій олімпіаді, після її завершення відбулася зустріч її учасників з викладачем Ужгородського державного університету доцентом Юрієм Мелітоновичем Ломсадзе. Він блискуче виступив перед учнями і розповів про дивовижні властивості електрона. Цей виступ так запав у душу З.З.Торича, що той вирішив вступати не куди-небудь, а в Ужгородський державний університет, щоб потім потрапити до цього дивовижного викладача на його кафедру теоретичної фізики. Курс, на якому вчився Золтан Торич, вважався дуже сильним. Там були такі студенти як О. Шпигель, А. Гаврилюк, Ю.Ільїн, В. Соснівкер. А.М. Гаврилюк зараз є доктором фізико-математичних наук, а працює в Інституті теоретичної фізики ім. академіка М.М. Боголюбова. Ю.Ільїн один час був проректором Сімферопольського університету, а згодом −міністром культури і освіти Автономної республіки Крим.

З Торичем З.З. пов’язана велика частина досліджень в Ужгородському відділенні теорії адронів ІТФ АН УРСР, в яких теоретико-груповий метод використовується для опису і систематизації елементарних частинок. З.З. Торич вважає себе останнім учнем професора Ю.М. Ломсадзе, оскільки свою кандидатську дисертацію він захистив у 1978 році, а вже у 1979 році Ю.М. Ломсадзе назавжди залишив Ужгород.

У зв’язку з питанням про учнів професора Ю.М. Ломсадзе мабуть цікаво буде згадати одну історію. То було, здається, у 1968 році. Два студенти Томського державного університету Лєв Орлов та Владімір Ратніков жваво цікавилися філософією фізики, штудіючи надруковані в СРСР книги і журнальні статті відповідного профілю. Їм потрапили до рук публікації Ю.М. Ломсадзе в журналі «Вопросы философии». Ці публікації так заінтригували студентів, що вони перевелися з Томського університету в Ужгородський державний університет, на третій курс фізичного факультету. Першому зі студентів щось не сподобалося у лекціях, які йому довелося слухати, і він через півроку перевівся у Ленінградський Інститут сходознавства АН СРСР. А другий −продовжував навчання в Ужгородському університеті, спеціалізувався на кафедрі теоретичної фізики, завідувачем якої був професор Ю.М. Ломсадзе, підготував і успішно захистив дипломну роботу, здається, під керівництвом Арнольда Євгеновича Ковальчука. На даний час Володимир Сазонович Ратніков − доктор філософських наук, професор, викладає у Вінницькому державному технічному університеті. На одному з семінарів, присвячених пам’яті професора Ю.М. Ломсадзе, Володимир Сазонович публічно заявив, що вважає себе учнем Юрія Мелітоновича.

Отже, можна зробити висновок про те, що вплив професора Ю.М. Ломсадзе не обмежувався лише безпосередніми контактами типу «викладач − студент», «лектор − аудиторія», «завідувач відділу − співробітники відділу», а здійснювався ще й через розумність ідей, що містилися в опублікованих ним статтях, зокрема і з філософії фізики. А хто візьме на себе відслідкувати всі можливі шляхи такого роду впливу?

Й.М. Шуба задав З.З.Торичу таке питання: «Чому Ломсадзе не захотів залишитися в Ужгороді і керувати Відділом теорії елементарних взаємодій?». Відповідь: «Керівництво Інституту ядерних досліджень АН УРСР виступило категорично проти продовження досліджень по темі «Теорія адронів» у рамках новоствореного Ужгородського відділення Інституту ядерних досліджень. Керівництво Інституту не тільки змінило назву відділу, перейменувавши його у «Відділ теорії елементарних взаємодій», але й змінило тематику наукових досліджень». Для зняття напруженості і усунення конфлікту в Ужгород тоді приїздила спеціальна комісія на чолі з віце-президентом АН УРСР В.І. Трефіловим.

Олександр Іванович Лендьєл з Інституту електронної фізики АН України розповів, з демонстрацією слайдів, про свої найновіші дослідження, присвячені жорсткому померону у м'яких даних. Це наука про взаємодію елементарних частинок при надвисоких енергіях, пов'язана зі знаменитою теоремою Померанчука: «Перерізи взаємодії частинок і античастинок у границі необмежено великих енергій співпадають між собою». У свій час професор Ю.М.Ломсадзе доклав чимало зусиль, щоб теорема Померанчука набула максимально прозорого змісту і була доведена при найбільш ліберальних припущеннях.

Академік Академії наук Вищої школи України, завідувач кафедри ядра і елементарних частинок Ужгородського національного університету, професор Іван Васильович Хіміч почав свою змістовну доповідь про кореляції нуклонів у парно-парних ядрах, що досліджуються в рамках адіабатичного підходу, з інформації про те, що він прослухав всі курси і спецкурси з теоретичної фізики, які вів професор Ю.М. Ломсадзе. Радше йдеться про ті лекції Ю.М. Ломсадзе, які читалися ним в Ужгородському університеті десь між 1955 і 1957 роками. І це вельми цікава інформація. Справа в тому, що є непрямі вказівки на те, що Ю.М.Ломсадзе у своїх лекціях ніколи не повторювався. Він завжди прагнув новизни і вмів бачити і знаходити цю новизну в самих прозаїчних і звичайних речах. Схоже на те, що його лекції носили унікальний характер. Щороку і щоразу він читав інші курси і спецкурси, хоча вони і мали одну і ту ж загальну назву, наприклад, «Квантова механіка». Імовірно, були курси раннього періоду педагогічної діяльності професора Ю.М. Ломсадзе, були курси зрілого періоду, були курси пізнього періоду. Ще одна не менш важлива деталь полягала в тому, що у своїх лекціях на парах для студентів професор Ю.М. Ломсадзе говорив одне, на методологічних і наукових семінарах − друге, в газетах публікував третє, у спеціалізованих журналах його тексти містили четверте, хоча й було деяке часткове перекривання матеріалу. «Ломсадзе не боявся йти нестандартним шляхом», − говорить І.В. Хіміч. «Школа Ломсадзе існує і буде існувати», − продовжує він і називає прізвище одного з його найкращих учнів − В.І. Фущича − першого закарпатця, який став член-кореспондентом Академії наук України.

Старший науковий співробітник відділу теорії елементарних взаємодій ІЕФ НАН України, кандидат фіз.-мат. наук Євгеній Юрійович Ремета розповів про оптичні потенціали розсіювання електронів і позитронів атомами. Про професора Ю.М. Ломсадзе сказав, що слухав його лекції у 1972 році. Є.Ю. Ремета вважає, що «Ю.М. Ломсадзе не любив число» і фактично з цієї причини виїхав з Ужгорода. На думку Євгенія Юрійовича, професор Ю.М. Ломсадзе при прийнятті свого радикального рішення в кінці 1970-тих років не врахував ту обставину, що якби він залишився в Ужгороді, то йому б довелося займатися задачею багатьох тіл − дуже нетривіальною проблемою механіки. Можливо, так

воно і є. Але відомо і те, що професор Ю.М. Ломсадзе не раз і не два говорив про «суто технічні проблеми», недвозначно натякаючи, наприклад, на задачі, які вирішуються в рамках квантової механіки або квантової електродинаміки. Він чи то люб'язно, чи то делікатно надавав іншим право займатися «технічними проблемами», а сам віддавав перевагу виключно фундаментальним. Змусити його змінити свою позицію було неможливо. Дієвим аргументом для нього була тільки бездоганна логіка і явний фізичний доказ.

Старший науковий співробітник відділу теорії елементарних взаємодій ІЕФ НАН України, кандидат фіз.-мат. наук Володимир Іванович Келемен почав свій виступ з гранично лаконічної тези: «Юрій Мелітонович вчив, що замало лише пояснювати особливості експериментальних даних, необхідно передбачати нові явища». Після цього перейшов безпосередньо до ілюстрації цієї тези множиною графічних залежностей диференціального перерізу розсіювання електронів на атомах від кута, енергії і сорту атомів. Об'єкти дослідження вибрані так, що наявні ще й реальні дані фізичного експерименту. Віртуальні залежності, отримані в результаті комп'ютерних обчислень, і дані спостережень в експериментах, виконаних за допомогою фізичних приладів, знаходяться у видимій узгодженості між собою. Але обчислені залежності наведені і для тих областей, де експериментальні результати відсутні.

Доцент кафедри теоретичної фізики Ужгородського національного університету Сергій Юрійович Мєдвєдєв назвав свій виступ так: «Про деякі паралелі між квантовою фізикою і східною філософією». Але реально у доповіді положення східної філософії не обговорювалися, хоча питання надзвичайно цікаве. Цікаве хоча б тієї причини, що не лише західна культура, а й уся сучасна культура давно вже de facto стали заручниками східних філософій. А мова у доповіді йшла в основному про гносеологічні проблеми квантової теорії вимірювання, яким у свій час дуже багато часу приділив професор Ю.М. Ломсадзе. На світоглядному рівні нема єдності у розумінні принципів квантової теорії вимірювань. Можемо дотримуватися і тієї точки зору, що квантова механіка є тільки математична схема для обчислення спостережуваних явищ, і потрібно користуватися цією схемою, не зважаючи на філософію квантової теорії. Користуватися нею як набором мнемонічних правил. «Але є щонайменш дві причини, з яких займатися філософією фізики конче необхідно», − зазначив доповідач. Адже схема обчислень може бути в принципі хибною, хоча побачити це безпосередньо складно з причин її нетривіальності і громіздкості. Можуть існувати альтернативні схеми обчислень, які призводять до різних результатів не тільки кількісних, але і якісних. Філософія і тільки філософія здатна у такій ситуації відігравати роль арбітра. Конкретне наукове пізнання засноване на розчленуванні єдиної сутності, єдиної реальності. А це знову ж таки філософія. Поняття і принципи фізики не дані згори, а це результат певної філософії, яка служить зв'язуючою ланкою між основами буття, світоглядом і конкретними фактами досліду. Реальний світ єдиний і неподільний. Це добре розуміли мудреці Древнього Сходу. Поняття сучасної фізики не лише абстрактні, але й надзвичайно узагальнені. Прагнення до узагальненості в теоретичній фізиці не випадкове, і це не питання забаганки: адже це в дійсності є прагнення до єдності світобудови, але вже у раціональних, осмислених і усвідомлених поняттях. Доповідач наводив цікаву фразу Ю.М. Ломсадзе: «Вільний електрон інтерферує сам з собою». Це у зв'язку з мисленними експериментами з розсіювання електрона на двох паралельних щілинах: їх можна трактувати як свідчення того, що електрон сам по собі має властивості не тільки корпускули, але і хвилі. Ю.М. Ломсадзе відрізнявся дуже високим рівнем строгості і точності мислення. На завершення свого повідомлення С.Ю. Мєдвєдєв сказав: «Ті проблеми, які об'єднують людей, набагато важливіші тих, які їх розділяють». Наука об'єднує людей. Діяльність Ю.М. Ломсадзе об'єднувала щонайменше деяких

фізиків Ужгорода. «У гільбертовому просторі вистачить місця всім», − часто повторював, можливо з чиїхось слів, професор Ломсадзе. − А це не звичний тримірний простір або чотиривимірний простір-час − це нескінченно вимірний простір. У доповіді С.Ю. Мєдвєдєва порушувались і інші питання, зокрема: нерівності Белла, знамениті теореми фон Неймана, які також знаходилися у полі зору професора Ломсадзе.

Коментуючи виступ С.Ю. Мєдвєдєва професор І.В.Хіміч зазначив: «Ломсадзе хотів навести математичний лоск на копенгагенське тлумачення квантової механіки». Тобто виходить так, що професор Ю.М. Ломсадзе визнавав у принципі копенгагенське тлумачення Нільса Бора, але вважав за необхідне доказовим чином виводити його з формалізму квантової механіки, причому з розвинутого її формулювання у гільбертовому просторі квадратично інтегрованих функцій.

На закінчення Семінару для його учасників були прокручені кадри старої кінохроніки, люб'язно надані Олександром Івановичем Лендьєлом. Унікальні кадри − знімки сорокарічної давнини, на яких зафільмований Ю.М. Ломсадзе в оточенні своїх колег.

Не можна не згадати одну важливу фразу, висловлену не без жалю Йосипом Михайловичем Шубою: «Я не бачив і не бачу в наш час людей на кафедрі, здатних працювати на тому ж рівні, на якому працював Ломсадзе; не було і, скоріш за все, не буде більше такого Генератора Ідей, яким був Юрій Мелітонович Ломсадзе». Можливо, так воно і є. Але думається, справа не у конкретних людях, а у незворотності часу. Можна крутити кінострічку у зворотному напрямку, можна тішити себе ілюзіями спогадів, можна знову і знову намагатися відновити віртуальне минуле, але воно буде необхідним чином віддалятися, поглинаючи при цьому всі нові фрагменти сучасного і несучи їх за собою єдиним потужним потоком кудись у незвідану глибину, в якийсь примарний світ тіней − тіней чи то минулого, чи то застиглого теперішнього…

Ю.М. Ломсадзе насправді був унікальною особистістю. На його семінари не потрібно було зганяти народ − народ сам валив, бажаючи бачити його і слухати. Та ж Велика фізична аудиторія завжди була переповнена, коли виступав Ю.М. Ломсадзе. У його виступах завжди було дещо таємниче, загадкове, містичне. В уважного слухача створювалася ілюзія того, наче безпосередньо стикаєшся з самою Реальністю − таємничою, загадковою, непізнаною. Виступи Ю.М. Ломсадзе перед студентською аудиторією у зрілий, так би мовити, період будувалися за принципом парадокса: дохідливо і гранично простою мовою з супроводом рисунків на дошці демонстрував один хід роздумів, який завершувався чітким формулюванням висновку або умовиводу, а потім такою ж дохідливою і простою мовою демонстрував інший, не менш переконливий, хід роздумів, але який призводив до прямо протилежного висновку. В принципі, це той метод, яким з успіхом користувався Сократ, софісти Древньої Греції, Гегель і Кьєркегор у Новий час. Але Ю.М. Ломсадзе не називав цих імен, не робив посилань, так само як і не заглиблювався у хащі філософії, а зосереджувався повністю на природознавчій, чисто фізичній задачі, хоча і у гранично спрощеному вигляді. І, тим не менш, він виявляв ті ж труднощі, які довічно стоять і будуть стояти перед допитливим і спраглим пізнання розумом. Слухач разом з доповідачем ставилися в парадоксальну, неможливу ситуацію, з якої не видно було жодного виходу. Потім починався скрупульозний аналіз ситуації, що склалася. Якщо хтось зі слухачів дозволяв собі перервати хід думок професора, щоб висловити вголос який-небудь спосіб виходу із ситуації, Ю.М. Ломсадзе миттєво підхоплював цю пропозицію, причому робив це з підкресленою люб'язністю і вдячністю за «розуміння» і «допомогу», і перемикався на логічний розвиток саме цього, запропонованого студентом, «виходу». Робив це акуратно, свідомо повільно (він справді не знав істинного вирішення проблеми!), уточнюючи одне положення, друге, третє,

виводячи з них єдино можливий висновок; потім продовжував до тих пір, поки не приходив до … явної нісенітниці, до повного безглуздя. Цей процес міг зайняти більшу частину лекції, якщо не всю лекцію повністю. Але ефект був вражаючий. І студент, який задав питання, і всі ті, хто не лінувався уважно слухати хід роздумів професора, ставали співучасниками своєрідного дійства − реального наукового пошуку. Порушена лектором проблема «чіпала за живе» слухачів, змушувала їх думати про матеріали лекції і після її завершення. Студент приходив додому і знову, і знову перечитував свої записи в загальному зошиті, заповнював прогалини, відновлював пропущені фрагменти логіки, починав ритися у книгах з філософії квантової механіки, починав вести самостійний по суті науковий пошук. Лекції з квантової механіки, які читав професор Ю.М. Ломсадзе, в якомусь сенсі були шокуючими. Протягом, скажімо, п'ятнадцяти пар, на яких викладався курс квантової механіки, на дошці перед студентами виписувалася одна-єдина формула − нестаціонарне рівняння Шредінгера! На все інше професор Ю.М. Ломсадзе вважав за недоцільне витрачати дорогоцінний час. Однак до тих, хто надто спрощено розумів дану позицію і не бажав розбиратися з текстом підручників з квантової механіки, професор Ю.М. Ломсадзе був нещадним − виганяв з екзамену чи заліку з шумом і тріском! Філософія фізики за Ю.М. Ломсадзе − це не поверхнева, багатослівна і туманна говорильня про об'єкти дослідження фізики, а строгі і точні судження, засновані на дійсному знанні математичного боку справи у всіх подробицях. Тільки ті судження мають право на існування у філософії фізики, які мають безсумнівну достовірність і бездоганну доказову силу. Професор Ю.М. Ломсадзе притримувався вкрай жорсткої позиції навіть стосовно математики. «З формалізму фізичної теорії повинні бути усунуті всі чисто математичні припущення», − приблизно таким виразом користувався він. Зрозуміло, що повністю обійти математику не вдасться в принципі. Але, виходячи з цього, зрозуміло також і те, чому думка професора Ю.М. Ломсадзе і його найближчого оточення з плином часу зосереджувалася на теоріях все більшого і більшого ступеня узагальненості. Апогей цього напрямку мислення був досягнутий у кінці сімдесятих років. І тут на нього, як грім з ясного неба, нагрянули з ідеями зовсім іншого плану − нагрянули з ініціативами створення Ужгородського відділення Інституту ядерних досліджень, та ще й з нав'язуванням якихось окремих задач прикладного характеру, та ще й в області атомної фізики, а не фізики високих енергій. Для нього це було неприпустимим кроком назад, поверненням до минулого п'ятдесятирічної давності, поверненням до пройдених етапів науки. Він був людиною, цілком спрямованою у майбутнє, до майбутніх фізичних теорій. І він залишив Ужгород. Залишив назавжди.

У нього було багато знайомих. Були справжні друзі: Юрій Борисович Молчанов, Мурад Давудович Ахундов, Лев Борисович Баженов − з Інституту філософії АН СРСР, Ігор Серафимович Алєксєєв − з Інституту історії природознавства і техніки АН СРСР. Щоразу, коли йому вдавалося вирватися на яку-небудь конференцію або науковий форум у Москві або в інших містах, він шукав зустрічі з ними. У їхньому товаристві відпочивав від провінційних турбот, знаходив натхнення на нові почини і дослідження. З ними він підтримував найтісніші і взаємно продуктивні контакти. Друзям дозволялася і пробачалася фамільярність у спілкуванні. Самобутні, дивовижні особистості…

Основним методом роботи для нього був науковий семінар і наукова суперечка − живий діалог. Дуже схоже на те, що він не любив бути пасивним слухачем доповідей, монологів, звітів. Чим витрачати час на пасивне слухання, краще перервати доповідача після першої ж мало зрозумілої фрази і затіяти суперечку. Або піти в кулуари і вирішити якесь конкретне питання. Ті семінари в Ужгороді, і ті суперечки, які на них розгоралися, були лише повторенням у мініатюрі тієї наукової і творчої атмосфери, яка панувала у провідних наукових центрах Москви − у Московському державному університеті ім. М.В.

Ломоносова і у ФІАН. Неважко уявити собі величезний зал засідань у ФІАН під час чергової сесії Академії наук СРСР. Він забитий вщент. У нього неможливо потрапити. Ще б пак: на підвищенні біля трибуни − академіки М.А. Марков і Я.Б. Зельдович. Між ними суперечка. Суперечка у самому розпалі. Пів залу − доктори наук, професори. Кожне слово фіксується десятками магнітофонів. Кожен жест знімається на плівку. Кожен штрих на дошці супроводжується спалахом чийогось фотоапарату. За час дискусій «прокручується» ціла книга. Через півроку вона з'явиться на полицях магазинів, але вже як мертвий груз науки, її відходи…

Понад усе він цінував свободу творчості. Позбавлена змісту та діяльність у науці, яка нав'язується досліднику в якій би то не було примусовій формі, незалежно від мотивування.

Серед місцевої інтелігенції були люди чимось схожі на нього. Наприклад, письменник Іван Михайлович Чендей − великий, до речі, друг Юрія Мелітоновича. Або художник, філософ, мислитель і педагог − Павло Юрійович Бедзір. Тут, правда, дружби не було. Але ходять чутки, що професор бував у майстерні художника-графіка. Ось три імені. Дивовижні імена… То були дуже різні люди − і за походженням, і за становищем у суспільстві, і за родом діяльності. Але жоден з них і думки не припускав, щоб хтось дозволив собі потрапити у святая святих − у внутрішні зали їх інтелектуальної лабораторії, у сферу їх творчості. По сутті це були поети. Один − поет наукової думки, другий − поет народного слова, третій − поет лінії і штриха. Безумовна свобода творчості у науці, літературі, графічному мистецтві і не терпляча жодних штучних перепон амбіційність об'єднувала їх ніби одним спільним лавровим вінком.

Yu. Xaveriy
Institute of Electronic Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine

PROFESSOR Y.M. LOMSADZE – ORGANIZER OF INTERNATIONAL CONFERENCES AND SCHOOLS FOR YOUNG SCIENTISTS ON QUANTUM FIELD THEORY AND PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES

The outstanding theoretical physicist Professor Yuriy Melitonovich Lomsadze is one of the founders of scientific research at the Faculty of Physics of Uzhgorod State University, the founder of the Department of Theoretical Physics of Uzhgorod State University and the Department of Hadron Theory at the Institute of Theoretical Physics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Here are the materials of the scientific seminar dedicated to the scientific achievements of Professor Yu.M. Lomsadze and his students.
Keywords: high energy physics, quantum theory, field theory

О.І. Ворошило, О.В. Макаренко
Інститут прикладної фізики Національної академії наук України,
вул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми
e-mail: alwar1972@gmail.com

РОЗШИРЕННЯ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ 1-ГО ПОРЯДКУ В ПОЛІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА ПОЛЯРИЗОВАНІ ВІРТУАЛЬНІ ФОТОННІ СТАНИ

З метою побудови аналітичної теорії процесів 2-го порядку за сталою тонкої структури була отримана ймовірність процесу випромінювання електроном в полі електромагнітної хвилі поляризованого фотона, що лежить поза масовою поверхнею.
Ключові слова: віртуальні фотонні стани, КЕД процеси в полі електромагнітної хвилі, фотонний проміжний стан, поляризаційні ефекти

Вступ

Стрімкий розвиток лазерної техніки уможливив проведення експериментів з фізики високих енергій в екстремально сильних електромагнітних полях. Для порівняння експериментальних даних з теоретичними важливою є побудова аналітичної теорії елементарних КЕД процесів в лазерному полі. Якщо аналітична теорія процесів 1-го порядку в лазерному полі давно розроблена [1] і чудово підтверджена в серії експериментів [2,3], то вже для процесів другого порядку використовується різні наближення, це, наприклад, наближення Вайцзеккер-Віллямса, резонансне наближення, наближення світлового фронту (LFA) тощо. Ці наближення дозволяють досліджувати процес але не враховують важливі аспекти процесів, зокрема, це можуть бути поляризаційні властивості проміжних частинок, інтерференція амплітуд або враховують вклад в процес лише деяких областей, які вважаються значущими. Розробка теорії процесів 2-го порядку в загальному випадку крім того, щоб дозволила точно описувати цей процес, але і могла б визначити справедливість та межі застосування цих наближень. У роботі [4] показано, що в резонансному наближенні знаходження ймовірності може бути зведене до розрахунку ймовірностей підпроцесів 1-го порядку, що врахують поляризацію проміжного стану. В резонансному наближенні проміжний фотон лежить на масовій поверхні і має, як і реальний, дві поляризації. Тому для розрахунку можна скористатись відомими виразами для ймовірності, що враховують поляризаційні властивості фотонів [1]. Ймовірності процесів 2-го порядку, з фотонним проміжним станом, у загальному випадку (поза резонансним наближенням) можливо записати через ймовірності 1-го порядку, з тим уточненням, що теорія цих процесів повинна бути розроблена для віртуальних фотонних станів та з врахуванням того факту, що проміжний фотон має три поляризації [5].

Амплітуда

Амплітуди процесу випромінювання фотона електроном в полі хвилі можна записати у вигляді [1]:

$$S_{fi} = \sum_{l=\infty}^{\infty} S_{fi}^{(l)}, \tag{1}$$

$$S_{fi}^{(l)} = C\left(e_f^* A\right)(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\tilde{p}_i + lk + \tilde{p}_f + k_f\right), \tag{2}$$

$$A_\mu = u_{p_f} M_{l,\mu}\left(p_f, p_i\right) u_{p_i}, \tag{3}$$

де k_f, e_f – 4-імпульс та 4-вектор поляризації випроміненого фотона; p_i, p_f – 4-імпульси початкового і кінцевого електронів; тільдою над 4-імпульсами позначаються відповідні квазіімпульси [1]; u_p – біспінор вільного електрона; M_l – біспінорна матриця, явний вигляд якої можна знайти, наприклад, в роботі [4]; C – нормувальна стала. В силу крос-інваріантності, амплітуди решти процесів 1-го порядку можуть бути отримані із (2) простими замінами. Так, наприклад, для процесу народження електрон-позитронної пари фотоном в полі електромагнітної хвилі ми повинні виконати такі підстановки: $k_f \to k_i$, $p_i \to p_f$, $e_f^* \to e_i$, де k_i, e_i – 4-імпульс та 4-вектор поляризації початкового фотона; p_f – 4-імпульс утвореного позитрона. Загальна структура амплітуди при цьому зберігається. Тому подальші розрахунки проведемо для випадку процесу випромінювання фотона, а отримані результати можуть бути потім використані для інших процесів 1-го порядку.

Для опису поляризаційних властивостей фотонного стану розглянемо ортонормований базис у 4-мірному просторі:

$$e_0' = n_f, e_1', e_2', e_3' = \lambda \frac{k}{\left(k n_f\right)} + n_f, \tag{4}$$

$$n_f = \frac{k_f}{\sqrt{\left|k_f^2\right|}}, e_1' = e_1 - \frac{\left(k_f e_1\right)}{\left(k k_f\right)} k, e_1' = e_2 - \frac{\left(k_f e_2\right)}{\left(k k_f\right)} k, \lambda = e_0'^2 = \pm 1, \tag{5}$$

де e_1, e_2 – 4-вектори поляризації електромагнітної хвилі, причому вони є компонентами звичайного базиса в 4-мірному просторі Мінковського: e_0, e_1, e_2, e_3; $k = (\omega, k) = \omega\left(e_0 + e_3\right)$ – хвильовий 4-вектор зовнішньої електромагнітної хвилі.

Відмітимо, що 4-вектори e_1', e_2' співпадають з векторами поляризаціями реального фотона, а e_3' – відповідає додатковій поляризації віртуального фотона.

Випадку фотона, що лежить поза масовою поверхнею, відповідає умова ортогональності фотонного та електронного струмів, така ж як і до реального фотона:

$$\left(k_f A\right) = \left(n_f A\right) = 0. \tag{6}$$

Отже 4-вектор A (3), розкладений за базисом (4), має лише три компоненти:

$$A = -\left(Ae_1^{'}\right)e_1' - \left(Ae_2^{'}\right)e_2' - \lambda\left(Ae_3'\right)e_3' \Rightarrow \left(e_f'^{*}A\right) = -\left(Ae_1^{'}\right)\left(e_f'^{*}e'\right)_1 - \left(Ae_2^{'}\right)\left(e_f'^{*}e'\right)_2 - \lambda\left(Ae_3'\right)\left(e_f'^{*}e'\right). \qquad (7)$$

Ймовірність

Диференційна ймовірність процесу в одиницю часу може бути записана у вигляді парціальних компонент:

$$d\mathrm{w}_{fi} = \sum_{l=1}^{\infty} d\mathrm{w}_{fi}^{(l)}, \qquad (8)$$

де парціальна диференційна ймовірність має вигляд:

$$d\,\mathrm{w}_{fi}^{(l)} = \left|S_{fi}^{(l)}\right|^2 \frac{V^2 d^3k_f d^3p_f}{T(2\pi)^6} =$$

$$= \mathrm{w}_0\,\mathrm{W}\,\delta^{(4)}\left(\tilde{p}_i + lk - \tilde{p}_f - k_f\right)d^3k_f d^3p_f\,, \qquad (9)$$

де V – нормувальний об'єм, T – нескінченний інтервал часу, w_0 – нормувальна стала, $\mathrm{W} = \left|\left(e_f^{*}A\right)\right|^2$ – квадрат інваріантної амплітуди (7).

Для знаходження w введемо узагальнення параметрів Стокса на випадок 3 поляризацій:

$$\xi_1^{(ij)} = \left|\left(e_f^{*}e_i'\right)\right|^2 - \left|\left(e_f^{*}e_j'\right)\right|^2,\ \xi_2^{(ij)} = 2\ \left(\left(e_f^{*}e_i'\right)\left(e_f e_j'\right)\right), \xi_3^{(ij)} = 2\ \left(\left(e_f^{*}e_i'\right)\left(e_f e_j'\right)\right), \qquad (10)$$

та поляризаційні вектори, що відповідають поляризації під кутом $\pm 45^{\circ}$, $e_{\pm}^{(ij)}$ круговим поляризаціям віртуального фотона в площині $e_i'e_j'$ в 4-мірному просторі (всього таких площин три: e_1', e_2', e_1', e_3', e_2', e_3'):

$$e_{\pm\pi/4}^{(ij)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_i' \pm e_j'\right), \quad e_{\pm}^{(ij)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_i' \pm ie_j'\right). \qquad (11)$$

З урахуванням виразів (7), (10), (11) для w отримаємо:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{3}\mathrm{w}_{\mathrm{unpol}} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\left(\frac{1}{3}\xi_1^{(ij)}\left(\mathrm{w}\left(e_i'\right) - \mathrm{w}\left(e_j'\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\xi_2^{(ij)}\left(\mathrm{w}\left(e_{\pi/4}^{(ij)}\right) - \mathrm{w}\left(e_{-\pi/4}^{(ij)}\right)\right) + \xi_3^{(ij)}\left(\mathrm{w}\left(e_{+}^{(ij)}\right) - \mathrm{w}\left(e_{-}^{(ij)}\right)\right)\right), \qquad (12)$$

$$\mathrm{w}(e) = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\hat{p}_f + m\right)\left(e^{*}M_l\left(p_f, p_i\right)\right)\left(\hat{p}_i + m\right)\overline{\left(e^{*}M_l\left(p_f, p_i\right)\right)}\right\}, \qquad (13)$$

$$\mathrm{w}_{\mathrm{unpol}} = -\frac{1}{4}Sp\left\{\left(\hat{p}_f + m\right)M_{l,\mu}\left(p_f, p_i\right)\left(\hat{p}_i + m\right)M_l^{\mu}\left(p_f, p_i\right)\right\}, \qquad (14)$$

де $\mathrm{w}_{\mathrm{unpol}}$ – відноситься до неполяризованого віртуального фотона; $\mathrm{w}\left(e_i'\right) - \mathrm{w}\left(e_j'\right)$ визначає поляризаційні ефекти пов'язані з лінійними поляризиціями віртуального фотона, $\mathrm{w}\left(e_{+\pi/4}^{(ij)}\right) - \mathrm{w}\left(e_{-\pi/4}^{(ij)}\right)$ – під кутом $\pm 45^{\circ}$, $\mathrm{w}\left(e_{+}^{(ij)}\right) - \mathrm{w}\left(e_{-}^{(ij)}\right)$ – круговими (циркулярними) поляризаціями.

Розрахунки виразу (13) суттєво залежать від поляризації електромагнітної хвилі та в загальному випадку еліптичної поляризації досить громіздкі. Але для конкретних поляризацій, вони можуть бути записані досить просто. Наприклад, у випадку лінійних поляризацій електромагнітної хвилі отримаємо:

$$\mathrm{w}(e)=2\left(\left|\left(p_i e^*\right)A_0+m\left(e_1' e^*\right)\eta A_1\right|^2-2\beta_{\mathrm{res}}\left(kk_f\right)A_0^2+\frac{m^2\eta^2}{4}\frac{\left(kk_f\right)}{\left(kp_f\right)\left(kp_i\right)}\left(A_1^2-A_2A_0\right)\right), \quad (15)$$

де параметр β_{res} визначає відхилення фотонного стану від масової поверхні:

$$\beta_{\mathrm{res}}=\frac{k_f^2}{4\left(kk_f\right)}. \quad (16)$$

Функції A_0, A_1 у виразі (15), що визначають багатофотонні процеси в полі лінійно-поляризованої хвилі, мають вигляд:

$$\mathrm{A}_0=L_l,\quad \mathrm{A}_1=\frac{1}{2}\left(L_{l+1}+L_{l-1}\right),\quad L_l=\sum_{i=-\infty}^{\infty}J_{l-2s}\left(y\right)J_s\left(b\right), \quad (17)$$

$$y=\frac{m\eta}{\omega}\sqrt{-g^2}\cos\chi,\quad b=m^2\eta^2\frac{\beta_-}{8\omega}, \quad (18)$$

$$g=\frac{p_f}{\left(kp_f\right)}-\frac{p_i}{\left(kp_i\right)},\quad \beta_-=\frac{1}{\left(kp_f\right)}-\frac{1}{\left(kp_i\right)},\quad \chi=\angle\left(\mathbf{g}_\perp,\mathbf{e}_1\right), \quad (19)$$

де $\mathbf{g}_\perp$ – проекція вектора $\mathbf{g}$ на площину $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Розрахунок доданків у виразі (12), що визначають різні поляризаційні ефекти для лінійно-поляризованої електромагнітної хвилі дає:

$$\mathrm{w}_{\mathrm{unpol}}=2m^2\left(-\left(1+\frac{2\left(kk_f\right)}{m^2}\beta_{\mathrm{res}}\right)\mathrm{A}_0^2+\eta^2\left(1+\frac{\left(kk_f\right)^2}{2\left(kp_f\right)\left(kp_i\right)}\left(\mathrm{A}_1^2-\mathrm{A}_2\mathrm{A}_0\right)\right)\right),\quad \tau^2=\frac{-g^2}{m^2\beta_-^2}\sin^2\chi, \quad (20)$$

$$\mathrm{w}\left(e_1'\right)-\mathrm{w}\left(e_2'\right)=2m^2\left(-\left(1+2\tau^2+\left(\frac{4}{m^2\beta_-}+\frac{2\left(kk_f\right)}{m^2}\right)\beta_{\mathrm{res}}\right)\mathrm{A}_0^2+\eta^2\left(\mathrm{A}_1^2-\mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_0\right)\right), \quad (21)$$

$$\mathrm{w}\left(e_1'\right)-\mathrm{w}\left(e_3'\right)=2m^2\left(-\left(1+\tau^2+\left(\frac{4}{m^2\beta_-}+\frac{2\left(kk_f\right)}{m^2}\right)\beta_{\mathrm{res}}\right)\mathrm{A}_0^2+\eta^2\left(1+\frac{\left(kk_f\right)^2}{2\left(kp_f\right)\left(kp_i\right)}\right)\left(\mathrm{A}_1^2-\mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_0\right)\right), \quad (22)$$

$$\mathrm{w}\left(e_2'\right)-\mathrm{w}\left(e_3'\right)=2m^2\left(\left(\tau^2-\frac{4}{m^2}\frac{\left(kp_f\right)\left(kp_i\right)}{\left(kk_f\right)}\beta_{\mathrm{res}}\right)\mathrm{A}_0^2+\eta^2\frac{\left(kk_f\right)^2}{4\left(kp_f\right)\left(kp_i\right)}\left(\mathrm{A}_1^2-\mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_0\right)\right), \quad (23)$$

$$\mathrm{w}\left(e_{\pi/4}^{(12)}\right)-\mathrm{w}\left(e_{-\pi/4}^{(12)}\right)=4\frac{\sqrt{-g^2}}{m\beta_-}\sin\chi\left(\eta\,\mathrm{A}_1+\frac{\sqrt{-g^2}}{m\beta_-}\cos\chi\cdot\mathrm{A}_0\right)\mathrm{A}_0, \quad (24)$$

$$\mathrm{w}\left(e_{\pi/4}^{(13)}\right)-\mathrm{w}\left(e_{-\pi/4}^{(13)}\right)=4\lambda\sqrt{\left(kk_f\right)\beta_{\mathrm{res}}}\left(\frac{\sqrt{-g^2}}{\beta_-}\cos\chi\cdot A_0^2+m\eta\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\right), \quad (25)$$

$$\mathrm{w}\left(e_{\pi/4}^{(23)}\right)-\mathrm{w}\left(e_{-\pi/4}^{(23)}\right)=4\lambda\sqrt{\left(kk_f\right)\beta_{\mathrm{res}}}\frac{\sqrt{-g^2}}{\beta_-}\sin\chi\cdot\mathrm{A}_0^2. \quad (26)$$

Всі доданки, що визначають ефекти, пов'язані з циркулярною поляризацію дорівнюють нулю:

$$\mathrm{w}\left(e_{+}^{(ij)}\right)-\mathrm{w}\left(e_{-}^{(ij)}\right)=0. \qquad (27)$$

Відмітимо, що викладки (20)-(26) проведені до такого ступеню деталізації, яка дозволяє їх використати для інших процесів 1-го порядку, відповідними підстановками.

Висновки

З метою побудови аналітичної теорії процесів 2-го порядку за сталою тонкої структури була отримана ймовірність процесу випромінювання електроном в полі електромагнітної хвилі поляризованого фотона, що лежить поза масовою поверхнею $k_f^2 \neq 0$. У порівнянні із випадком коли електрон лежить на масовій поверхні, ймовірність містить додаткові доданки пов'язані, як із додатковою поляризацією вздовж вектора e_3', так і з поляризаційними ефектами під кутами $\pm 45^{\circ}$ та круговими поляризаціями в площинам, що утворює вектор e_3' з e_1', e_2'. Разом це дає 5 додаткових доданків у ймовірності в порівнянні із фотоном, що лежить на масовій поверхні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. V.I. Ritus A.I. Nikishov. Quantum electrodynamics of phenomena in an intense field. Trudy FIAN, 111. 1979, p. 1-279.
2. C. Bamber at al. Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses, Phys. Rev. D 60 (1999), pp. 092004.
3. D. L. Burke at al. Positron production in multiphoton light-by-light scattering. Phys. Rev. Lett., 79. 1997, p. 1626-1629.
4. V.M. Nedoreshta O.I. Voroshylo. The resonance approach for the process of the photo-trident in the field of a linearly polarized electromagnetic wave // Problems of Atomic Science and Technology, №153. 2024, p. 3-7.

[5] L.P. Pitaevskii V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz. Relativistic Quantum Theory. Pergamon, Oxford, 1971.

O. Voroshylo, O. Makarenko

[1]Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, str. 58, Petropavlivska, 40000, Sumy
e-mail: alwar1972@gmail.com

EXTENSION OF THE THEORY OF 1ST ORDER PROCESSES IN THE ELECTROMAGNETIC WAVE FIELD TO POLARIZED VIRTUAL PHOTON STATES

In order to construct an analytical theory of 2nd-order processes the fine structure constant, the probability of the process of emission by an electron in the field of an electromagnetic wave of a polarized photon located outside the mass surface was obtained.
Keywords: virtual photon states, QED processes in the electromagnetic wave field, photonic intermediate state, polarization effects

V.M. Simulik
Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 21, Universitetska Str., 88017,Uzhgorod, Ukraine
e-mail: vsimulik@gmail.com

STEP BY STEP ANALYSIS OF THE *N*-DIMENSIONAL APPROACH TO THE DIRAC EQUATION

The Dirac equation in *N* spatial dimensions is under consideration. The first step is the derivation of the Dirac equation in 7-component space-time M(1,6) with one time coordinate and six space coordinates. Three 8-component Dirac equations from one and the same 256-dimensional matrix Clifford – Dirac algebra have been derived. Corresponding Clifford – Dirac algebra in the Pauli – Dirac representation of 8x8 gamma matrices is put into consideration. This matrix algebra over the field of real numbers is proved to have 256-dimensional basis and to be isomorphic to geometric $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$ algebra. It is shown that in order to derive three Dirac equations from one and the same Clifford – Dirac algebra the application of the 64-dimensional gamma matrix subalgebra (isomorphic to geometric $C\ell^{\mathbb{C}}(1,5)$ algebra) is sufficient. Such subalgebra is determined by the six generators from the matrix $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$ algebra, which are not contained the operator of complex conjugation.
Keywords: 256-dimensional Clifford – Dirac algebra, *N*-component Dirac equation, 8x8 gamma matrices, generalized Minkowski space-time M(1,6),

Introduction

It is symbolic that Yuriy Melitonovich Lomsadze was born at the end of 1924, and in the following year, 1925, Werner Heisenberg's article [1] was published, which is associated with the birth of quantum mechanics as a special section of theoretical physics. Thus, the beginning of the scientific activity of Yu.M. Lomsadze coincided with the era of formation of quantum theory, and the subsequent fate of the scientist was intertwined with the era of its comprehensive development.

Modern high energy physics is interested in the equations of motion of quantum particles in the spaces of higher dimensions. Recently, with the interest in the higher dimensional field theory, the *N*-dimensional Schrödinger equation with different potentials has been studied by many authors, see, e.g., [2, 3].

The *N*-component Dirac equation was mentioned in [4, 5] in the procedure of derivation of the ordinary 4-component Dirac equation. Taking into account the theory of the *N*-dimensional gamma matrix representations of the Clifford algebras [6–11] the *N*-component Dirac equation can be constructed in the *N*-dimensional space-time. Such generalization was considered in [12–14] and was called the Dirac equation in *D*+1 space-time or the Dirac equation in *D* spatial dimensions.

For our purposes we study in [15] the 8-component Dirac equation in the 7-component space-time M(1,6). For example, the equation without redundant components for the particles carrying the spin *S*=3/2 has 8-compont wave function [16–18].

In the paper [15] the generalized Dirac equation related to 7-component space-time with one time coordinate and six space coordinates has been introduced and solved. Three 8-component Dirac equations from one and the same 64-dimensional gamma matrix representations of the Clifford algebra have been derived. Such Clifford – Dirac algebra was shown to be the subalgebra of the 256-dimensional gamma matrix representation of the Clifford algebra, which was put into consideration in [19]. This matrix algebra over the field of real

numbers is proved to have 256-dimensional basis and to be isomorphic to geometric $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$ algebra. The proof is based on the ideas and formalism presented in the publications [20–23].

It is shown that in order to derive three Dirac equations from one and the same Clifford–Dirac algebra the application of the 64-dimensional gamma matrix subalgebra (isomorphic to geometric $C\ell^{\mathbb{C}}(1,5)$ algebra) is sufficient. Such subalgebra is determined by the six generators from the matrix $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$ algebra, which are not contained the operator of complex conjugation.

The conclusion that the suggested equation is new follows from the consideration in [24], where 36 variants of the Dirac equation derivation were reviewed.

Mathematical foundations

The system of units $\hbar = c = 1$ is chosen, the metric tensor in Minkowski space-time M(1,3) is given by

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = g^{\mu}_{\nu}, \ \ (g^{\mu}_{\nu}) = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1); \quad x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu} \tag{1}$$

and summation over the twice repeated indices is implied.

The ordinary Dirac equation for a free non-interacting spinor field is given by

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi(x) = 0, \tag{2}$$

where

$$\mathrm{M}(1,3) = \{x \equiv (x^{\mu}) = (x^0 = t, \ \ \vec{x} \equiv (x^k))\} \tag{3}$$

is the Minkowski space-time and 4-component function $\Psi(x)$ belongs to the rigged Hilbert space $\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathbb{S}^{*3,4}$, where $\mathrm{H}^{3,4}$ is the quantum-mechanical Hilbert space of 4-component functions over $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$ and the Schwartz test function space $\mathbb{S}^{3,4}$ is dense in the Schwartz generalized function space $\mathbb{S}^{*3,4}$.

However, ordinary Dirac formalism, where

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

σ^k are the standard Pauli matrices and the following notations are used

$$x \epsilon \mathrm{M}(1,3), \ \ \partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \ \ \mu = 0,1,2,3, \ \ k = 1,2,3, \tag{5}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}, \tag{6}$$

is not the subject of our consideration.

Here we consider the 8-component representations of the Dirac equation. For our purposes the 8x8 gamma matrices should be involved.

The Dirac equation in N+1 dimension is given by

$$\sum_{\mu=0}^{N} \gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - m + ieA_{\mu}\right)\Psi(x) = 0 \tag{7}$$

and is well known from the publications [12–14], where m is the mass of the particle, $N\times N$ matrices γ^{μ} satisfies the anticommutation relations of corresponding Clifford algebra representation (6), $g^{\mu\nu}$ is $N\times N$ metric tensor, $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ (μ=0) or $g^{\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu}$ ($\mu \neq 0$). In the papers [12–14] the partial case of the potentials A_{μ} in equation (7) was considered, where $eA_0 = V(\mathrm{r})$ and $eA_{\mu} = 0$ ($\mu \neq 0$). The separation of variables in hyperspherical coordinates of the real D-dimensional space was fulfilled and the corresponding radial equations were solved.

The potential A_{μ} (μ=N) in equation (7) look likes as an evident error. Further, the free noninteracting Dirac equation and corresponded formalism of the free spinor field were not considered. Here we are going for the assertion, that the simple listing of the dimensions like

N=4,5,6,7,8,…,*N-1*,. in equation (7) is not possible. This list has a structure. The first reason is as follows. The Clifford – Dirac algebra representation exists not for all dimensions [6–11]. Further, in the article [15] we demonstrated the structure of the checklist of the Dirac equations even in 7 dimensions of M(1,6) space-time.

Below the corresponding formalism is considered.

We start from a set of nine 8x8 gamma matrices

$$\Gamma^0 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_4 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_4 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^1 = i\Sigma_8^1 = i\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{I}_4 \\ \mathrm{I}_4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_4^2 \\ -\Sigma_4^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_4^3 \\ -\Sigma_4^3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma^1 \\ 0 & 0 & \sigma^1 & 0 \\ 0 & -\sigma^1 & 0 & 0 \\ -\sigma^1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 & 0 & 0 \\ -\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma^3 \\ 0 & 0 & \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 & 0 & 0 \\ -\sigma^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^7 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma^2\check{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma^2\check{C} \\ \sigma^2\check{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^2\check{C} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^8 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i\sigma^2\check{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sigma^2\check{C} \\ -i\sigma^2\check{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sigma^2\check{C} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

where the 4x4 Pauli matrices are given by $\Sigma_4^2 = i\begin{vmatrix} 0 & -\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0 \end{vmatrix}, \Sigma_4^3 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{vmatrix}$, and the explicit form of Σ_8^1 is evident from the first row in (8). The 2x2 Pauli matrices σ^j are taken in the standard form. Further, here $\check{C}$ is the operator of complex conjugation $\check{C}\Psi = \Psi^*$, ($\check{C}$ is the operator of involution in the Hilbert space $\mathrm{H}^{3,2}$). Symbol I_4 denotes 4x4 unit matrix. Note that all Pauli matrices, which for different dimensions are denoted here as $\Sigma_{8,}\ \Sigma_4$ and σ, satisfy the corresponding anti-commutation relations of the Pauli algebra generators.

Lemma 1. *The operators (8) satisfy the anti-commutation relations*

$$\Gamma^{\mathrm{A}}\Gamma^{\mathrm{B}} + \Gamma^{\mathrm{B}}\Gamma^{\mathrm{A}} = 2g^{\mathrm{AB}}, \quad g = (+ - - - - - - - -), \ \mathrm{A,B} = \overline{0,8}, \tag{9}$$

of matrix representation of the Clifford algebra generators.

Proof. The asserion above is proved by the direct calculation of the relationship (9). Note that here $\check{C}$ is the operator of complex conjugation $\check{C}\Psi = \Psi^*$, ($\check{C}$ is the operator of involution in the Hilbert space $\mathrm{H}^{3,2}$ and $\mathrm{H}^{6,2}$). Thus, in the space of real numbers the assertion is proved.

QED

Theorem 1. *The matrix algebra (8), (9) is 256-dimensional (2^8=256) and is isomorphic to Clifford algebra $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$ over the field of real numbers.*

Proof. Lemma 1 is the first necessary step. Further, it is useful to observe that all matrices from (8) are traceless. Furthermore, one can easy calculate that $\Gamma^0\Gamma^9\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\Gamma^6\Gamma^7\Gamma^8 = \mathrm{I}_8$, but the verification of relation

$$\Gamma^6 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4 \tag{10}$$

is necessary for further consideration. Note that formula (10) is the analogy of the relation $\gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, which is well-known from the gamma matrix representation of the Clifford algebra $C\ell^{\mathbb{C}}(1,3)$. Therefore, our steps below can be similar to the corresponding proof for $C\ell^{\mathbb{C}}(1,3)$. The next step is to prove that all matrices in the set (1) are linearly independent. Indeed, the equation

$$\sum_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}\Gamma^{\mathrm{A}} = 0$$

yields if and only if the condition $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8$ is fulfilled. It may seem that the dimension of this gamma matrix algebra is equal to $2^9 = 512$? Nevertheless, the dimension is $2^8 = 256$. Here the relation (10) (not a matter of fact that Γ^6 is a linearly independent element of the set (8)) plays the decisive role.

In order to prove that the dimension is $2^8 = 256$ let us once more recall the similar situation with ordinary Clifford – Dirac algebra, which is well-known from the papers [20–23].

For the basic step it is enough to consider the subalgebra, which is determined by the first seven generators from the matrix algebra (8). Let us recalculate the basis of this subalgebra.

The solution follows after taking into account the equality (10). Indeed, the candidates for the additional elements of the basis like Γ^6; $\Gamma^0\Gamma^6 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5$, $\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^6 = -i\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5$, etc., are already among the 64-dimensional set under consideration and do not contribute to the basis of the algebra. Therefore, we deal here with the 64-dimensional subalgebra.

It means that we have only 8 generators for the matrix algebra determined by formulas (8) and (9). After that, it is evident that the dimension of the matrix algebra determined by the formulas (8), (9) is 256. The anti-commutation relations for such algebra should be given as

$$\Gamma^{\mathrm{A}}\Gamma^{\mathrm{B}} + \Gamma^{\mathrm{B}}\Gamma^{\mathrm{A}} = 2g^{\mathrm{AB}}, \quad g = (+ - - - - - - -), \quad \mathrm{A,B} = \overline{0,7}, \tag{11}$$

It is easy to understand that this algebra, which in the set (8) includes two additional matrix operators Γ^7 and Γ^8, is defined only over the field of real numbers.

Finally, according to the formalism in the monograph [22] this matrix algebra is isomorphic to the geometric Clifford algebra $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$. The designations 1 and 7 are related to the number of +1 and -1 on the diagonal in (11). Thus, the theorem is proved.

QED

Similarly, the 64-dimensional subalgebra, which is determined by the first seven generators from the matrix algebra (8), is isomorphic to geometric algebra $C\ell^{\mathbb{C}}(1,5)$.

After the above given consideration it is evident that in (8) we have two linearly independent sets of the gamma matrices Γ^1, Γ^2, Γ^3. The first one is given by Γ^1, Γ^2, Γ^3 and the second has the form $\Gamma^4 \to \Gamma^1$, $\Gamma^5 \to \Gamma^2$, $\Gamma^6 \to \Gamma^3$. Therefore, two equivalent formulations of the 8-component Dirac equation are evident. Who knows if each one will be more useful in future?

The first possible Dirac equation is given by

$$\left(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi(x) = 0, \tag{12}$$

where $\Psi(x)$ is the 8-component wave function and the matrices Γ^μ are given as the first four from the set (8).

The second possible Dirac equation is given by

$$(i\Gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - m)\Psi(x) = 0, \tag{13}$$

where the matrices α follows from the set (8) after the substitution $\Gamma^4 \to \Gamma^1,\ \Gamma^5 \to \Gamma^2,\ \Gamma^6 \to \Gamma^3$. Therefore, here we have the same Γ^0 but another Γ^j. Of course, the equations (12) and (13) are equivalent.

Nevertheless, following [15] we can introduce the third Dirac-like equation, which follows from the formulas (8), (9) and visually is another one

$$(i\Gamma^{\mathrm{A}}\partial_{\mathrm{A}} - m)\Psi(X) = 0, \quad \mathrm{A} = \overline{0,6}. \tag{14}$$

Here we have first seven gamma matrices from (8), $X \in \mathrm{M}(1,6)$, where

$$\mathrm{M}(1,6) = \{X \equiv (X^{\mathrm{A}}) = (X^0 = t, \quad \vec{X} \equiv (X^J) \in \mathrm{R}^6)\}, \quad J = \overline{1,6},$$

is the corresponding Minkowski type space-time. Therefore, here the 8-component function $\Psi(X)$ in equation (14) belongs to the rigged Hilbert space $\mathbb{S}^{6,8} \subset \mathrm{H}^{6,8} \subset \mathbb{S}^{*6,8}$. Equation (14) essentially differs from the ordinary 8-component Dirac equations (12), (13).

Consider the general solutions of the equations (12), (13), (14). The general solution of the equation (12) is given by

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k \left[c^{\mathrm{r}}(\vec{k})\mathrm{v}^{-}_{\mathrm{r}}(\vec{k})e^{-ikx} + c^{*\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})\mathrm{v}^{+}_{\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})e^{ikx}\right], \tag{15}$$

where

$$kx = \widetilde{\omega}t - \vec{k}\vec{x}, \qquad \widetilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \qquad \mathrm{r} = \overline{1,4}\,,\ \tilde{\mathrm{r}} = \overline{5,8}, \tag{16}$$

$c^{\mathrm{r}}(\vec{k})$, $c^{*\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})$ are the amplitudes of the particle and antiparticle, respectively, which relation to the quantum-mechanical momentum-spin amplitudes is considered in [17] in details, and the 8-component spinors $\mathrm{v}^{-}_{\mathrm{r}}(\vec{k})$, $\mathrm{v}^{+}_{\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})$ are given by

$$\mathrm{v}^{-}_{1}(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -ik^1+k^3 \\ 0 \\ ik^2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{v}^{-}_{2}(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -ik^1+k^3 \\ 0 \\ ik^2 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{v}^{-}_{3}(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ -ik^2 \\ 0 \\ -ik^1-k^3 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{v}^{-}_{4}(\vec{k}) =$$

$$N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ -ik^2 \\ 0 \\ -ik^1-k^3 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathrm{v}_5^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} ik^1+k^3 \\ 0 \\ ik^2 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \mathrm{v}_6^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ ik^1+k^3 \\ 0 \\ ik^2 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \mathrm{v}_7^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} -ik^2 \\ 0 \\ ik^1-k^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \end{vmatrix},\ \mathrm{v}_8^-(\vec{k})$$

$$= N\begin{vmatrix} 0 \\ -ik^2 \\ 0 \\ ik^1-k^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}+m)}},\quad \widetilde{\omega} = \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\,. \tag{18}$$

The spinors (17) satisfy the relations of the orthonormalization and completeness similar to the corresponding relations for the standard 4-component Dirac spinors.

The general solution of the equation (13) has the form

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k\left[c^{\mathrm{r}}(\vec{k})\bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}}^-(\vec{k})e^{-ikx} + c^{*\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})\bar{\mathrm{v}}_{\tilde{\mathrm{r}}}^+(\vec{k})e^{ikx}\right], \tag{19}$$

The principal difference between (15) and (19) is only in the explicit form of 8-component Dirac spinors, which here are given by

$$\bar{\mathrm{v}}_1^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^3 \\ k^1+ik^2 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_2^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^1-ik^2 \\ -k^3 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_3^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ k^3 \\ k^1+ik^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_4^-(\vec{k})$$

$$= N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ k^1-ik^2 \\ -k^3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\bar{\mathrm{v}}_5^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ k^3 \\ k^1+ik^2 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_6^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ k^1-ik^2 \\ -k^3 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_7^-(\vec{k}) = N\begin{vmatrix} k^3 \\ k^1+ik^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \\ 0 \end{vmatrix},\ \bar{\mathrm{v}}_8^-(\vec{k})$$
$$= N\begin{vmatrix} k^1-ik^2 \\ -k^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widetilde{\omega}+m \end{vmatrix},$$

In the solution (19) the interpretation of amplitudes is the same as in the solution (15), other notations are already explained in formulas (16) and (18).

The general solution of the equation (14) is given by

$$\Psi(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^6K\left[c^{\mathrm{r}}(\vec{K})\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}}^-(\vec{K})e^{-iKX} + c^{*\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{K})\tilde{\mathrm{v}}_{\tilde{\mathrm{r}}}^+(\vec{K})e^{iKX}\right], \tag{20}$$

where $K \equiv (\vec{K}) = (k^1, k^2, k^3, k^4, k^5, k^6)$, $d^6K \equiv d^1k d^2k d^3k d^4k d^5k d^6k$,

$$KX = \widehat{\omega}t - \vec{K}\vec{X}, \qquad \widehat{\omega} = \sqrt{\vec{K}^2 + m^2}, \qquad \mathrm{r} = \overline{1,4}\,,\ \tilde{\mathrm{r}} = \overline{5,8},$$

$c^{\mathrm{r}}(\vec{k})$, $c^{*\tilde{\mathrm{r}}}(\vec{k})$ are the amplitudes of the particle and antiparticle, respectively, which relation to the quantum-mechanical momentum-spin amplitudes can be considered in complete analogy with the consideration in [17], and the 8-component spinors $\tilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}}^-(\vec{K})$, $\tilde{\mathrm{v}}_{\tilde{\mathrm{r}}}^+(\vec{K})$ are given by

$$\tilde{\mathrm{v}}_1^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} \widehat{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -iK^1+K^3 \\ 0 \\ iK^2+K^6 \\ K^4+iK^5 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_2^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ \widehat{\omega}+m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -iK^1+K^3 \\ K^4-iK^5 \\ iK^2-K^6 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_3^-(\vec{K})$$
$$= N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{\omega}+m \\ 0 \\ -iK^2+K^6 \\ K^4+iK^5 \\ -iK^1-K^3 \\ 0 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_4^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widehat{\omega}+m \\ K^4-iK^5 \\ -iK^2-K^6 \\ 0 \\ -iK^1-K^3 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\mathrm{v}}_5^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} iK^1 + K^3 \\ 0 \\ iK^2 + K^6 \\ K^4 + iK^5 \\ \widehat{\omega} + m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_6^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} 0 \\ iK^1 + K^3 \\ K^4 - iK^5 \\ iK^2 - K^6 \\ 0 \\ \widehat{\omega} + m \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_7^-(\vec{K}) = N\begin{vmatrix} -iK^2 + K^6 \\ K^4 + iK^5 \\ iK^1 - K^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widehat{\omega} + m \\ 0 \end{vmatrix},\ \tilde{\mathrm{v}}_8^-(\vec{K})$$

$$= N\begin{vmatrix} K^4 - iK^5 \\ -iK^2 - K^6 \\ 0 \\ iK^1 - K^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \widehat{\omega} + m \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\omega}(\widehat{\omega}+m)}}, \qquad \widehat{\omega} = \sqrt{\vec{K}^2 + m^2}\,.$$

Thus, we have three Dirac equations from one and the same Clifford–Dirac algebra (8), (9). Note that in order to derive three Dirac equations from one and the same Clifford–Dirac algebra it is sufficient to consider the 64-dimensional gamma matrix subalgebra (isomorphic to $C\ell^{\mathbb{C}}(1,5)$), which is determined by the first seven generators from the matrix algebra (8).

The most interesting among the equations (12), (13), (14) is the 8-component Dirac-like equation (14) in 7-component space-time. This equation is completely different in comparison with the ordinary Dirac equations (12), (13) and is introduced here for the first time. This special place among the other investigations can be determined on the basis of the review of different approaches to the Dirac formalism in [17], Chapter 2.

It is easy to understand that equation (14) can be derived from the procedure of factorization of the Klein–Gordon equation as follows

$$(\partial_{\mathrm{A}}\partial^{\mathrm{A}} - \mathrm{m}^2)\Psi(X) = 0,$$

$$(\partial_{\mathrm{A}}\partial^{\mathrm{A}} - \mathrm{m}^2) = (i\Gamma^{\mathrm{A}}\partial_{\mathrm{A}} - m)(i\Gamma^{\mathrm{B}}\partial_{\mathrm{B}} + m), \qquad \mathrm{A},\mathrm{B} = \overline{0,6}.$$

Note that Lagrange approach and Lagrange function can be constructed here similarly to the consideration in the book [21]. The specification will be minimal. Many variants of derivation of the ordinary Dirac equation reviewed in the monograph [17] and in the publication [24] may be used for the derivation of the equation (14) as well.

Equation (14) under consideration couples together two different coordinate spaces with one and the same time in the form $\mathrm{R}^6 = \mathrm{R}^3 \otimes \mathrm{R}^{*3}$. They can be similar to each other as two duplications of $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$, but, of course, can be completely different fragments as $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$ and $\mathrm{R}^{*3} \subset \mathrm{M}^*(1,3)$ corresponding to the different physical reality.

The interpretation of $\mathrm{R}^{*3} \subset \mathrm{M}^*(1,3)$ as the space for dark matter and dark energy together with $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$ as our well-known living (native) space is not senseless as well. Note that the time axe in $\mathrm{M}^*(1,3)$ and in $\mathrm{M}(1,3)$ is one and the same. Therefore, here the Dirac-like equation (14) coupled together these two possibly different space-time manifolds. It will be better to consider the consequences not in the framework of this brief communication, which, in general, is about mathematical aspects of the problem.

Indeed, the popular assertions of many authors that such elementary particles as hypothetical even in Standard model "axions" are the carriers of the dark matter cannot inspire any clearly thinking scientist.

Briefly, the simple question appears "Why is the Dirac equation one of the general equations of the Universe?" Without any hope to the final conclusion our tiny answer is under consideration. The Dirac equation directly follows from the Clifford algebra. The Clifford algebras follow from the geometry of space-time.

Conclusion

The important result of this brief communication is the generalization of the 8-component Dirac equation for the 7-component space-time M(1,6). The interesting result is that here from one and the same 64-dimensional gamma matrix Clifford – Dirac algebra three different 8-component Dirac equations have been derived.

Note that for 4x4 matrices we have only 4 independent gamma matrices, 4 component Ψ function and the Dirac equation exists only in 4-dimensional space-time. From the consideration above it follows that for 8x8 matrices we have only 6 ordinary independent gamma matrices, 8 component Ψ function and the Dirac equation exists only in 7-dimensional space-time M(1,6). Not in 8-dimensional space-time! For higher dimensions this difference will increase. For the 16x16 gamma matrices and 16 component Ψ function we will have 8 ordinary independent gamma matrices and additional Dirac equation in M(2,6) space-time, where M(2,6) contains two different times. Thus, the simple listing of the dimensions like N=4,5,6,7,8,…,N-*1*, in equation (7) is not possible. This list is not homogeneous and has a structure. The first reason is in structure of the list of the existing Clifford algebras. The Clifford – Dirac algebra representation exists not for all dimensions [6–11]. Further, here we demonstrated the structure of the checklist of the Dirac equations even in 7 dimensions of M(1,6) space-time.

Therefore, the assertions in [12–14] on the N-component Dirac equation looks like as preliminary and needed the additional consideration.

Another application of the new Dirac-like equation is the direct continuation of investigations [25, 26] for the case of 8-component Dirac equation and special spin 3/2 equations [16–18], which can be considered in the form of 8-component Dirac equation as well. Note that here corresponding to the suggested Dirac-like equation quantum-mechanical and canonical field (of Foldy – Wouthuysen type) equations are considered as well.

LIST OF REFERENCES

[1] W. Heisenberg, Z. Phys. **33**, 879 (1925).
[2] K.J. Oyewumi, F.O. Akinpelu, A.D. Agboola, Int J, Theor. Phys. **47**, 1039 (2008).
[3] Wahyulianti1, Suparmi, Cari, F. Anwar, J. Phys: Conf. Ser. **795**, 012022 (2017).
[4] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics (McGraw Hill Book Co, New York, 1964).
[5] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations, 3rd edition (Springer, Berlin, 2000).
[6] A. Pais, J. Math. Phys. **3**, 1135 (1962).
[7] A.D. Kennedy, J. Math. Phys. **22**, 1330 (1981).
[8] N. Salingaros, J. Math. Phys. **23**, 1 (1982).
[9] C.P. Poole, Jr., H.A. Farach, Found. Phys. **12**, 719 (1982).
[10] Y. Song, D. Lee, Adv. Appl. Cliff. Alg. **23**, 965 (2013).
[11] Y. Brihaye, P. Maslanka, S. Giler, P. Kosinski, J. Math. Phys. **33**, 1579 (1992).

[12] X-Y. Gu, Z-Q. Ma, S-H. Dong, Int. J. Mod. Phys. E. **11**,335 (2002).
[13] S-H. Dong, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4977 (2003).
[14] G. Chen, Phys. Rev. A. **72**, 044102 (2005).
[15] V.M. Simulik, Carp. Math. Pub. **15**, 529 (2023).
[16] V.M. Simulik, J. Phys: Conf. Ser. **670**, 012047 (2016).
[17] V. Simulik, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory of Arbitrary Spin (Nova Science, New York, 2020) – 343 p.
[18] V.M. Simulik, I I Vyikon, J. Phys. Commun. **6**, 075008 (2022).
[19] V.M. Simulik, I I Vyikon, Adv. Appl. Cliff. Alg. **33**, 53 (2023).
[20] R.H. Good, Jr., Rev. Mod. Phys. **27**, 187 (1955).
[21] N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields (John Wiley and Sons Inc., New York, 1980).
[22] P. Lounesto, Clifford Algebras and Spinors, 2-nd edition (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
[23] B. Thaller, The Dirac equation (Springer, Berlin, 1992).
[24] V.M. Simulik. The Dirac Equation Near Centenary: a Contemporary Introduction to the Dirac Equation Consideration, arXiv:2409.05287, [math-ph] 25 Sep 2024, 31 p.
[25] V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, Phys. Lett. A. **375**, 2479 (2011).
[26] V.M. Simulik, Adv. Appl. Clifford Algebras, **28**, 93 (2018).

В.М. Симулик
Інститут електронної фізики НАН України,
вул. Університетська, 21, 88017, Ужгород
e-mail: vsimulik@gmail.com

ПОКРОКОВИЙ АНАЛІЗ *N*-ВИМІРНОЇ МОДЕЛІ РІВНЯННЯ ДІРАКА

Розглядається рівняння Дірака у N вимірному просторі. Першим кроком є виведення рівняння Дірака у 7-компонентному просторі-часі M(1,6), що має одну часову координату і 6 просторових координат. Три 8-компонентні рівняння Дірака виведено з однієї і тієї ж самої 256-вимірної матричної алгебри Кліффорда – Дірака. Введено у розгляд відповідну алгебру Кліффорда – Дірака у представленні Паулі – Дірака 8x8 гамма матриць. Доведено, що така матрична алгебра над полем дійсних чисел має 256-вимірний базис і є ізоморфною до геометричної алгебри $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$. Показано, що для виведення трьох рівнянь Дірака з однієї і тієї ж самої алгебри Кліффорда – Дірака достатньо використовувати 64-вимірну підалгебру (ізоморфну до геометричної алгебри $C\ell^{\mathbb{C}}(1,5)$). Така підалгебра визначається шістьома генераторами матричної алгебри $C\ell^{\mathbb{R}}(1,7)$, які не містять оператора комплексного спряження.

З.З. Торич
Інститут електронної фізики НАН України,
вул. Університетська, 21, 88017, Ужгород
e-mail: bgl8.2012@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ГРУП ДЛЯ ОПИСАННЯ ПРОЦЕСІВ З ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ЧАСТИНКАМИ ПІД КЕРІВНИЦТВОМ ПРОФЕСОРА Ю.М. ЛОМСАДЗЕ

У статті наведено історію започаткування наукових пошуків в описанні процесів з елементарними частинками в рамках нелінійної кіральної $SU(3)\times SU(3)$-динаміки під керівництвом проф. Ю.М. Ломсадзе. Відзначено також першорядну роль В.І. Сабова у розвитку цих досліджень в Ужгороді. Приведено важливіші публікації, в яких представлено описання різних процесів у зазначеній динаміці ужгородськими дослідниками, використовуючи метод мультиплетного і модифікованого мультиплетного порушення симетрії, запропонованих Ю.М. Ломсадзе та його учнями В.І. Сабовим і В.М. Гулієм.

Вступ

Розглянуто історію започаткування та розвитку досліджень в теорії елементарних частинок у рамках методів теорії груп під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Юрія Мелітоновича Ломсадзе. Вони велися з 1967 року спочатку на кафедрі теоретичної фізики Ужгородського державного університету (УжДУ), завідувачем якої був Ю.М. Ломсадзе, та з 1970-го року у відділі теорії адронів Інституту теоретичної фізики АН УРСР, завідувачем якого він став.

Зауважимо, що Ю.М. Ломсадзе не був байдужим до групових методів у теорії елементарних частинок, хоча темою його досліджень були аналітичні властивості амплітуди розсіяння. Ще в 1962 році у видавництві «Высшая школа» з'явився його підручник для студентів університетів «Теоретико-групповое введение в теорию элементарных частиц». Він розумів важливість методів теорії груп у фізичних дослідженнях. Правда підручник стосувався тільки класичних в теорії поля і частинок груп та їх зображень, а саме: лоренцівської групи, груп обертання у тривимірному евклідовому просторі, інверсії простору і часу, зарядового спряження. Внутрішні симетрії в теорії частинок одержали поштовх тільки в 1964 році, коли Ґелл-Манном та Нееманом був розвинений так званий 8-річний шлях, тобто застосування групи $SU(3)$ в систематиці елементарних частинок. Тому, розгляд цих груп відсутній у книзі Ю.М. Ломсадзе.

Упровадження і розвиток теоретико-групових методів у дослідженнях з фізики елементарних частинок в Ужгороді

Започаткував дослідження з застосуванням методів теорії груп в описанні процесів з елементарними частинками у 1967 р. Василь Іванович Сабов, тоді ще аспірант професора Ю.М. Ломсадзе. Сам професор підтримав цей напрямок і влітку 1967 р. відрядив свого аспіранта до Дубни в Об'єднаний інститут ядерних досліджень. Там В.І. Сабов прослухав лекції проф. Г.І. Огієвецького про нелінійну кіральну $SU(3)\times SU(3)$-динаміку та її застосування в теорії елементарних частинок. В.І. Сабов з Дубни привіз надрукований на друкарській машинці примірник лекцій, вивчення якого одразу почалось. Лекції закінчувалися східним прислів'ям: «*Коли розсіється пил, то*

ти побачиш, сидиш на коні, чи на вислюку». Теорія прожила приблизно 15 років, тобто за такий проміжок часу авторами ще друкувалися статті з тематики нелінійних кіральних динамік.

Згодом В.І. Сабов захистив спочатку кандидатську, потім і докторську дисертації та став професором кафедри теоретичної фізики Ужгородського державного університету.

Перша група $SU(3)$ в $SU(3)\times SU(3)$-динаміці представляє лінійні перетворення полів (зображення групи), друга — нелінійні (реалізація групи). Затравний лагранжіан був інваріантний відносно перетворень повної групи. Цей лагранжіан різними шляхами порушувався в основному або до ізотонічної симетрії $SU(2)$, або збереження гіперзаряду.

Нелінійну кіральну динаміку запропонував С. Вайнберг [1], який представив лагранжіан, з якого в деревному наближенні легко і просто можна було отримати довжини розсіянь піонів на нуклонах при низьких енергіях. Дж. Швінгер помітив [2], що лагранжіан Вайнберга інваріантний відносно інфінітезимальних перетворень нелінійної кіральної групи $SU(2)\times SU(2)$. Оскільки лагранжіан містив члени взаємодії, тому групу назвали динамічною.

Одразу після появи цих робіт багатьма авторами була запропонована нелінійна $SU(3)\times SU(3)$-динаміка і почався її бурхливий розвиток. З'явилась велика кількість статей, які стосувались як теоретико-групових аспектів цієї динаміки, так і описань різних процесів при взаємодії елементарних частинок.

Для ілюстрації як лінійних, так і нелінійних трансформацій полів нижче наведено приклад інфінітезимальних $SU(3)\times SU(3)$-перетворень псевдоскалярного поля:

$$\delta_T \xi_j = i\alpha_j \left[T_K \xi_m\right] = i\alpha_j \left[\tfrac{1}{2}\lambda_k \xi_m\right] = i\alpha_j f_{jkm}\xi_m \tag{1}$$

$$\delta_X \xi = i\beta_j \left[X_j \xi_m\right] = i\tfrac{1}{2}\beta_j \left[\lambda_j - \left(\xi^2\lambda_j + \lambda_j\xi^2\right) + \ldots\right], \tag{2}$$

$$\delta_T \xi_j = i\alpha_j \left[T_k \xi_m\right] = i\alpha_j f_{jkm},$$

де $\xi = \frac{1}{2}\xi_j\lambda_j$ – октет псевдоскалярних мезонів, ξ_j – його елементи, α_j, β_j – інфінітезимальні параметри груп, λ_j – матриці Ґелл-Манна, f_{jkm} – структурні константи групи $SU(3)$, $\xi^2 = \xi_j\,\xi_j$, $j=1, 2,\ldots,8$.

Генератори T і X групи $SU(3)\times SU(3)$ задовольняють перестановочним співвідношенням:

$$\left[T_j, T_k\right] = if_{jkm}T_m \ , \tag{3}$$

$$\left[T_j, X_k\right] = if_{jkm}X_m \ , \tag{4}$$

$$\left[X_j, X_k\right] = if_{jkm}T_m \ . \tag{5}$$

Для прикладу нижче представлено лагранжіан для псевдоскалярних і баріонних полів, інваріантний відносно перетворень нелінійної групи $SU(3)\times SU(3)$:

$$L_{inv} = Sp\left(\frac{1}{2a^2}\, p_\mu^2 + i\overline{B}\gamma^\mu D_\mu B - m_B \overline{B}B + b_1\overline{B}\gamma^\mu\gamma_5 p_\mu B + b_2\overline{B}\gamma^\mu\gamma_5 B p_\mu\right), \quad (6)$$

де a, b_1, b_2 – константи, Sp – слід матриці (від німецького слова шпур). Коваріантні похідні полів псевдоскалярних мезонів і баріонів мають вигляд:

$$p_{\mu j} = D_\mu \xi_j = \frac{shi\xi F}{i\xi f}\partial_u \xi_j, \quad (7)$$

$$D_\mu B = \partial_\mu B + i\left[\nu_\mu, B\right], \quad (8)$$

$$\nu_\mu = \frac{1-chi\xi F}{i\xi F}\partial_u \xi, \qquad \xi F = \xi_j F^j, \qquad F_{km}^j = -f_{jkm.} \quad (9)$$

Важливим напрямком досліджень було і введення в динаміку додаткових членів, які порушували її симетрію до $SU(2)$ або збереження гіперзаряду $U(1)$.
Свій внесок у методи порушень симетрії зробила і ужгородська школа під керівництвом Ю.М. Ломсадзе, про що буде сказано нижче.

Нелінійна кіральна $U(3)\times U(3)$ та- $SU(3)\times SU(3)$-динаміка: перші публікації та результати ужгородських дослідників

Почнемо зі статті В.І. Сабова [3], яка була опублікована у вигляді препринту Інституту теоретичної фізики АН УРСР у 1968 році. В ній були одержані довжини пружних *PP*- і *PB*-розсіянь, однак у масовому члені використовувалась середня маса октетів.

Слід згадати також три студентські роботи з УжДУ в тезах конференції Тартуського державного університету 1969 року [4−6]. В цих роботах представлено результати для процесів фотонародження π^+- *і* K^+-мезонів на нуклонах, уведення векторних і аксіальновекторних мезонів у динаміку, ширини розпадів векторних і аксіальновекторних мезонів, відповідно.

Останні результати про згадані ширини розпадів пізніше були опубліковані в науковому журналі [7], де представлені згадані величини для процесів:

$\rho(765)\to 2\pi$, $K^*(892)\to K\pi$, $\varphi(1019)\to \overline{K}K$, $A_1(1070)\to\rho\pi$, $E(1420)\to K^*\overline{K}+\overline{K}K^*$, $K_A(1230)\to K\rho+K\pi$, $K_A(1320)\to K\rho+K\pi$.

У роботі [8] при розрахунках довжин пружних *PP*- і *PB*-розсіянь (*P* – октет псевдоскалярних мезонів, а *B*−баріонів) використані експериментальні маси частинок октетів.

У роботі [9] в U(3)×U(3)-симетричний лагранжіан уведено векторні та аксіально-векторні резонанси мезонів і баріонів, розраховано відношення ймовірностей їх розпадів. В обчисленнях за маси частинок у нонетах брались їх експериментальні значення.

Робота доповідалась на 3-ій Робочій нараді по аксіоматичній теорії поля і теорії елементарних частинок, ІТФ АН УРСР, квітень 1969 р.

Мультиплетне порушення симетрії

Мультиплетне порушення симетрії, що представляє собою заміну полів у лагранжіані їх лінійним перетворенням, тобто

$$A \rightarrow A' = \alpha A + b\lambda_\delta A + cA\lambda_\delta, \tag{10}$$

де *a, b, c* – постійні, було запропоновано в роботі Ю.М. Ломсадзе, В.І. Сабо [10]. Пізніше в роботі [11] було знайдено найбільш загальне лінійне перетворення полів:

$$A \rightarrow A' = \alpha A + b\lambda_\delta A + cA\lambda_\delta + dISp\lambda_\delta A + e\lambda_\delta SpA\lambda_\delta. \tag{11}$$

Результати обчислень диференціальних перерізів фотонародження векторних і аксіальновекторних мезонів з мультиплетним порушенням симетрії (11) були опубліковані в роботі [12].

Модифіковане мультиплетне порушення симетрії

У відділі теорії адронів ІТФ АН УРСР В.Н. Гулієм і Ю.М. Ломсадзе було запропоновано модифіковане мультиплетне порушення симетрії [13]. Воно виникло на основі вивчення моделі з порушеною симетрією *SU(2),* тобто порушеною ізотопічною симетрією. Якщо симетрію порушувати таким чином, що в гамільтоніан уводиться додатковий член, понижуючий симетрію до збереження електричного заряду, то одержується динамічне правило сум, яке містить не тільки маси частинок, але й константи зв'язку. Щоб отримати таке ж правило сум, використовуючи мультиплетне порушення симетрії, тобто замінюючи поля їх лінійним перетворенням, у членах взаємодії слід виконати перетворення:

$$A \rightarrow A' = a\left(1 + b\tau_3\right)A, \tag{12}$$

де *a, b* – постійні, а в масових членах – обернене:

$$A \rightarrow A' = \left[\ a\left(1 + b\tau_3\right)\ \right]^{-1} A. \tag{13}$$

Таке порушення симетрії отримало назву «модифіковане мультиплетне порушення симетрії». Це порушення було узагальнено на *SU*(3)-симетрію і за його допомогою було одержано низку результатів в описанні процесів з сильною, електромагнітною та слабкою взаємодіями.

Так, у роботі [14], використовуючи зазначене порушення, були розраховані довжини пружних *PP*- і *PB*-розсіянь. Одержані результати задовільно збігаються з експериментом, крім *πK*-розсіяння, для якого отримано значення довжини, яке на порядок більше експериментального.

У статті [15] вивчалось фотонародження К-мезонів на нуклонах: реакції $\gamma N \rightarrow K\Lambda$, $\gamma N \rightarrow K\Sigma$. Результати задовільно збігаються з експериментом.

Існуючі на ті часи моделі не могли описати ширини розпадів $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, $\eta \rightarrow 3\pi^0$. В моделі [11] з модифікованим мультиплетним порушенням симетрії отримано гарний збіг теоретичних значень з експериментальними.

Заключення

Коротко викладено внесок ужгородської школи під керівництвом професора Ю.М. Ломсадзе у розвиток теоретичних досліджень процесів з елементарними частинками в нелінійній кіральній *SU*(3)×*SU*(3)-динаміці. Підкреслено роль членів школи в розробці нового методу порушення симетрії, а саме: запровадження мультиплетного і модифікованого мультиплетного порушення симетрії лагранжіана.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. S. Weinberg. Dynamical approach to current algebra. // Phys. Rev. Lett. – 1967. – V. 18. – P. 185.

2. J. Schwinger. Chiral dynamics // Phys. Lett. – 1967. – V. 24B. – P. 473-476.
3. Сабо В.И. // Препринт ИТФ-68-63. – Kiev, 1968.
4. А. Шпигель. Фоторождение π^+- и K^+-мезонов вблизи порога на основе киральной *SU*(3)x*SU*(3)-динамики // «Тартуский государственный университет. Материалы XXI студенческой научной конференции 26-29 марта 1969 г.» Тарту, 1969. - С. 18.
5. Ю. Ильин. Введение векторних и аксиально-векторных резонансов в киральную *U*(3)x*U*(3)-динамику // Там же. - С. 19-20.
6. З. Торич. Некоторые следствия киральной *U*(3)x*U*(3)-динамики для векторных и аксиальновекторных резонансов // Там же. - С. 20-22.
7. В.И. Сабо, З.З. Торич. Некоторые следствия киральной *U*(3)x*U*(3)-динамики для векторных и аксиальновекторных резонансов // ЯФ. – 1969. – Т. 1. – С. 378-380.
8. Y.M. Lomsadze, V.I. Sabo, Z.Z. Torich, A.G. Spiegel. The nonlinear *U*(3)x*U*(3) dynamics of low-energy *PP* and *PB* interactions// Preprint ITP 69-45. - Kiev, 1969. – 16p.
9. А.М. Гаврилик, Ю.М. Ильин, В.И. Сабо // Введение резонансов в киральную *U*(3)×*U*(3)-динамику. – Препринт ИТФ-69-41. – 7 с.
10. Yu.M. Lomsadze, V.I. Sabo. // Preprint ITP 69-82. – Kiev , 1969.
11. З.З. Торич. Нарушенная нелинейная киральная *SU*(3)x*SU*(3) динамика и распад $\eta \to 3\pi$ // Препринт ИТФ-76-123Р. - Киев, 1976. – 17 с.
12. Kelemen V. I.; Sabo V. I.; et al. Photoproduction of vector and axial vector resonances in broken nonlinear chiral *SU(3)* x *SU*(3)-dynamics. // Lett. Nuovo Cim. – 1972. – V. 4: - P. 401-406.
13. В.Н. Гулий, Ю.М. Помсадзе. Мультиплетный метод нарушения симметрии в решаемой квантовой модели // Препринт ИТФ-74-110Р. – Киев, 1974. – 12 с.
14. Торич З. З. РР- и РВ-рассеяние на пороге в нелинейной киральной *SU*(3)x*SU*(3)-динамике с модифицированным мультиплетнвм нарушением // УФЖ. – 1974. - Т. 19. – С. 134-140.
15. Торич З. З. Низкоенергетическое фоторождение К-мезонов на нуклонах в нелинейной киральной *SU*(3)x*SU*(3)-динамике с модифицированным мультиплетнвм нарушением // УФЖ. – 1976. - Т. 21. – С. 807-811.

Z.Z. Tarics
Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
21, Universitetska Str., 88017,Uzhgorod, Ukraine
e-mail: bgl8.2012@gmail.com

APPLICATION OF GROUP THEORY METHODS FOR THE DESCRIPTION PROCESSES WITH ELEMENTARY PARTICLES UNDER THE GUIDANCE OF PROF. YU.M. LOMSADZE

The article gives the history of the initiation of scientific researches in the description of processes with elementary particles within the framework of nonlinear chiral *SU*(3)x*SU*(3)-dynamics under the leadership of prof. Yu,M. Lomsadze. The primary role of V.I. Sabov is also underlined in the development of these studies in Uzhhorod. More important publications and descriptions of various processes related to the mentioned dynamics of Uzhhorod researchers using rhe method of multiplet and modified multiplet symmetry breaking proposed by Yu.M. Lomsadze, V.I. Sabov and V.M. Guliy are brought.

T. Obikhod
[1] Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine,
Prosp. Nauky, 47, 03028, Kyiv
e-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

THEORY AND EXPERIMENT OF GRAVITON PHYSICS

In the context of the search for the graviton as a constituent particle of the quantum theory of gravity, an experiment is presented to determine the properties of the chiral graviton mode. The Hilbert space of the lowest Landau level is presented as a hierarchical structure. The twisted K-theory of C*-algebras is used as a mathematical apparatus for describing the hierarchical structure of conformal Hilbert spaces.
Keywords: graviton mode, Landau level, fractional quantum Hall effect, conformal Hilbert spaces, twisted K-theory of C*-algebras

Gravity is one of the fundamental interactions in nature, along with electromagnetic, strong and weak interactions. A full-fledged theory of quantum gravity has remained elusive for many decades, but if gravity is quantum in nature, there should be a weak excitation of the gravitational field, the graviton. Scientists have presented the first experimental data confirming the existence of a chiral graviton mode, which should help us to understand how gravity works. The authors of the study from the US, Germany and China found these particles in a special type of liquid that behaves in a special way under a magnetic field [1].

In the condensed state of matter, excitations can arise that obey the same equations as the quanta of some fundamental fields. These are, as a rule, very special conditions that require the presence of low temperatures, a magnetic field, and in some cases also the limitation of two dimensions (in thin films or, under certain conditions, on the surface of the sample). Two-dimensional “universe" connected with the quantum Hall effect, is characterized by Fermi velocity of the chiral Luttinger liquid of the edge transport and by magnetic length. The ability to experimentally measure these two parameters leads to rich physics that can be realized at high energies. The topological features inherent to high-energy physics lead to the emergence of quasiparticles – hypothetical spin-2 bosons or gravitons [2]. Similar modes, called graviton modes (GM), arise in the quantum fluid of electrons under the influence of a strong magnetic field at low temperatures. This effect is called the fractional quantum Hall effect (FQHE) in a two-dimensional fluid [3].

To study gravitational modes, inelastic scattering of photons is considered, modeled using microscopic theory with Hamiltonians at different filling factors [1]. A common feature of FQH fluids is multiple GMs in different subspaces in one Landau level (LL). The number of observed GMs is dynamical and meaningful for specific interaction Hamiltonians. Each GM can be interpreted as the null spaces of model Hamiltonians within one LL.

Our goal is to present the geometric origin of GM and the hierarchical structure of conformal Hilbert spaces as null spaces of model Hamiltonians. We then introduce twisted K-group theory to identify each set of GM excitations, which leads to a topological explanation of the emergence of multiple GM.

We’ll use the following Hamiltonian

$$\hat{H} = \sum_{i-1}^{N} \frac{1}{2m} \bar{g}^{ab} \hat{\pi}_{ia} \hat{\pi}_{ib} + \hat{V}_{\text{int}}, \quad (1)$$

where $\hat{\pi}_{ia} = \hat{p}_{ia} + e\hat{A}_{ia}$ – the dynamical momentum operator of the i-th electron, A_i is the external vector potential, connected with magnetic field by formula $B = \varepsilon^{ab}\partial_a A_{ib}.\hat{V}_{\text{int}}$ describes the dynamics only within a single LL, the magnetic length is $l_B = \sqrt{1/eB}$. The Hilbert space of a single LL, referred to as the lowest LL (LLL), is parametrized by the metric $\overline{g}^{ab}$, which leads to density modes in higher LLs, known as “cyclotron gravitons". The dynamics is determined by the guiding center coordinates $\overline{R}^a = \hat{r}^a - \varepsilon^{ab}\pi_b l_B^2$. The interaction energy in (1), $\hat{V}_{\text{int}}$, , is a functional of $\overline{R}^a$ and expressed as

$$\hat{V}_{\text{int}} = \int d^2 q V_{|q|}\overline{\rho}_q\overline{\rho}_{-q},$$

with $\overline{\rho}_q = \sum_i e^{iqR_i}$ – the guiding center density operator and $|q| = \sqrt{\overline{g}^{ab}q_a q_b}$ – the distance in the momentum space. There is presented the analogy to the “cyclotron graviton" in the integer quantum Hall effect through the type of gravitational interaction, $\hat{V}_{\text{int}} = \hat{V}_1^{2body}$. The Hilbert spaces like LLL are called conformal Hilbert spaces (CHSs) as they are generated by the conformal operators like the Virasoro algebra, known as the Virasoro constraint in string theory, applied only on the physical states [4]. So such CHSs are built up with quasiparticles.

To study multiple GM, it is necessary to study the properties of the energy levels of electron-electron interaction described by the CHS. The CHS of a lowest LL, LLL is parametrized by the unimodular metric $\overline{g}^{ab}$, quantum fluctuations of which lead to density modes in higher LLs, “cyclotron gravitons". The energy of GM is very high, with a large magnetic field. These GM are connected with higher energy levels within integer quantum Hall effect (IQHE), since the LLL is fully filled. For FQHE in a partially filled LL, the dynamics is determined by the guiding center coordinates $\overline{R}^a$, which determine the interaction energy $\hat{V}_{\text{int}}$. Such Hilbert spaces are spanned by zero energy many-body states of special local Hamiltonians, including the pseudopotentials. Fig. 1 illustrates a hierarchical structure of CHS in the LLL.

So, the subspaces of the LLL have a hierarchical structure $H_{k+1} \subset H_k$. The rest of the cyclotron GMs are examples to understand the emergence of multiple GMs from V_{int} in accordance with the hierarchical structure. To understand that the number of GMs is a dynamic property, we’ll consider the model Hamiltonian for the GMs

$$\hat{V}_{\text{int}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \hat{V}_k. \qquad (2)$$

The inelastic scattering with the circularly polarized light, as was shown in [5] for the Jain states with a filling factors ν = 2/7, 2/9, 1/4 and three body components of interaction (2), provides an example to understand gravitons’ dynamics with peaks observed at almost the same frequency for each polarization in the second LL, SLL. So an introduction of a third component, $V^{3bdy}{}_9$, to the microscopic Hamiltonian can lead to the splitting of the two GMs to three GMs. Moreover, it is interesting to stress the hierarchical relationship, $H_9^{3body} \subset H_1^{2body} \subset H_8^{3body}$.

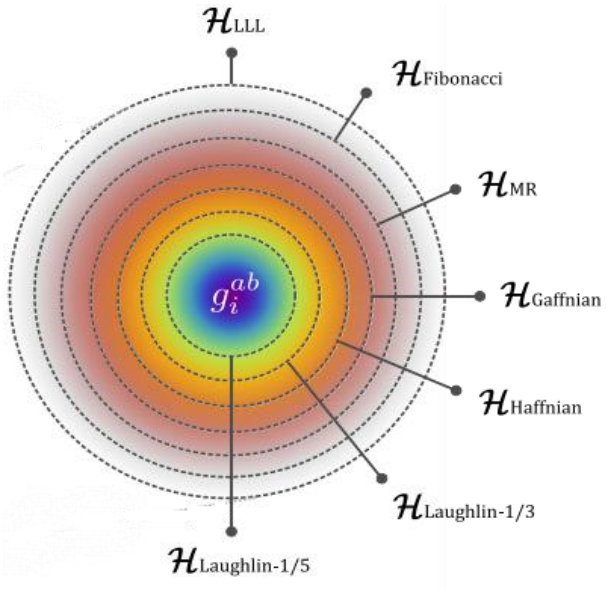


Figure 1. The hierarchical structure of the CHSs in the LLL.

We can use the apparatus of the twisted K-group for calculation of Hilbert space states of charged particles for explanation of the FQHE, which are topological phases of LLLs. As for the FQHE we are dealing with a set of levels with a filling factor less than one. The lowest LL is parametrized by the metric $\overline{g}^{ab}$ with a hierarchical structure of CHS as presented in Fig. 1. Since we are dealing with four types of interaction, it is appropriate to use the apparatus of vector bundles to describe a complex formation of D-brane type. B-field interacting with D-branes can be taken into account through the Dixmier-Douady invariant, which characterizes the bundles and describes the strength of the Neveu-Schwarz B-field interacting with D-branes. D-branes are topological solitons whose charges are described by Grothendieck K-groups. One of the most exciting discoveries of D-brane theory is the prediction of the non-commutativity of space-time coordinates [6]. The description of this non-commutative geometry is realized in terms of the twisted K-theory of C*-algebras. Let us calculate the topological charges of the D6-brane using twisted K-theory methods. Consider the following vector bundle over a compact manifold X:

$$\begin{array}{ll} F \to E_H & \\ \downarrow & [H] \notin Tors\left(H^3(X,Z)\right) \\ X & \end{array}$$

with structural group $Aut(F) = \lim\limits_{n \to \infty} SU(n)/Z_n$ and H – the Dixmier-Douady invariant, describing the intensity of the Neve-Schwartz B-field [7], characterizing the bundles E_H. Reduction of twisted K groups to an exact sequence of the form

$$0 \to Z \to Z_n \to 0$$

leads to the result

$$K_0\left(S^3, n[H]\right) = Z_n.$$

This group value determines the topological charges of the D6-brane in the presence of the Neveu-Schwarz -field [8]. Since the theory of relativity is defined in four-dimensional space, three coordinates plus time, the three-dimensional sphere with the punctured point is an approximation of three-dimensional Euclidean space. The ten-dimensional space in string theory, compactified onto six-dimensional space, is described in terms of a topological invariant of D6-brane, in this case by the twisted K-group, which takes values in the cyclic group of order *n*, $Z_n = \{0,1,...n-1\}$. We see that with the addition of the next interaction component to formula (2), a new energy level or a new excited state of the GM is added, which indicates a consistent increase in the number of the energy levels within the FQHE. The nesting of each previous level into the next one is fixed, $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset ... \subset H_n$, which is well reflected by the value of the twisted K-group. Thus, the values of the topological charges of the K-group give us information about the nature and number of energy levels that are excitations of the LLL within the FQHE framework.

REFERENCES

1. Wang, Y., Yang, B. Analytic exposition of the graviton modes in fractional quantum hall effects and its physical implications // Phys. Rev. – 2022. – B 105. – P. 035144.
2. F. Dyson. Is a graviton detectable? In: XVIIth International Congress on Mathematical Physics (World Scientific, 2014), P. 670–682.
3. S.M. Girvin, A.H. MacDonald, P.M. Platzman. Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum hall effect // Phys. Rev. – 1986. – B 33. – P. 2481.
4. J.L. Uretsky. Redundancy of conditions for a Virasoro algebra // Communications in Mathematical Physics. – 1989. – 122 (1). – P. 171–173.
5. W. Yuzhu, Y. Bo Geometric fluctuation of conformal Hilbert spaces and multiple graviton modes in fractional quantum Hall effect // Nat Commun. – 2023. – Vol. 14. – P. 2317.
6. N. Seiberg, E. Witten. String theory and noncommutative geometry // JHEP. – 1999. – Vol.9909:032. – 92 p.
7. Dixmier J., Douady A. Champscontinues d'espaces hilbertiens at de C*-algebres // Bull. Soc. Math. France – 1963. – Vol. 91.- P.227 – 284.
8. Yu. Malyuta, T. Obikhod. K-theory of C* algebras in high-energy physics // Reports of the National Academy of Sciences. – 2001. – № 6. – P. 84-86.

Т. Обіход
Інститут ядерних досліджень Національної Академії Наук України,
Просп. Науки, 47, 03028, Київ
e-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

ТЕОРІЯ І ЕКСПЕРИМЕНТ ФІЗИКИ ГРАВІТОНА

У контексті пошуку гравітона як складової частинки квантової теорії гравітації представлено експеримент для визначення властивостей кіральної гравітонної моди. Гільбертовий простір найнижчого рівня Ландау представлено у вигляді ієрархічної структури. Твістована K-теорія C*-алгебр використовується як математичний апарат для опису ієрархічної структури конформних гільбертових просторів.
Ключові слова: гравітонна мода, рівень Ландау, дробовий квантовий ефект Холла, конформні гільбертові простори, твістована K-теорія C*-алгебр

І. Качурик[1], І. Гула[2]
[1] Глухівський національний педагогічний університет імені О. Довженка,
вул. Київська, 24, 41400, Глухів
e-mail: hulaih@khmnu.edu.ua
[2] Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький

КОГЕРЕНТНІ СТАНИ ОДНОРІДНОЇ ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА

Розробляється теорія когерентних станів (КС) однорідної групи де Сіттера SO(1,4). Запропоновано простий метод їх побудови, одержано для них диференціально-різницеве рівняння і формули узагальнених парціально-хвильових розкладів. Показано, що КС можуть інтерпретуватися як «плоскі хвилі» в 4-вимірному просторі Лобачевського, точками якого вони параметризуються. По такого типу системі «плоских хвиль» розкладено хвильову функцію вільної частинки змінної маси, розглядуваної як функція імпульсного простору Лобачевського $L_p^{(4)}$. Одержано у явному вигляді оператори перетворень зсувів уведеного в розгляд конфігураційного простору, «канонічно-спряженого» простору $L_p^{(4)}$; виявлено, що їх спільний спектр співпадає з кривим простором $L_p^{(4)}$, а спільною власною функцією є «плоска хвиля».
Ключові слова: когерентні стани, група, представлення, простір Лобачевського, орисферичні хвилі.

У роботі ставиться задача послідовного вивчення властивостей уведеної в [1] системи когерентних станів (КС) для однорідної групи де Сіттера *SO*(1,4).

Виявилось, що КС тісно пов'язані з групами. Так, уже звичайні КС, які вперше були уведені в оптику, зв'язані з групою Гайзенберга, і їх найважливіші властивості отримуються з допомогою цієї групи ([2, 3]). Саме завдяки груповому підходу до усієї тематики КС, значно зміцнився базовий рівень методу КС і помітно розширилась область його застосувань у проблемах фізики – у квантовій теорії поля, квантовій оптиці, теорії магнетизму і в фундаментальних питаннях самої квантової механіки. У немалій мірі це пояснюється також і особливостями самих КС: було встановлено, що КС – це лінійно не незалежні, переповнені системи векторів, не ортогональні один одному у просторі станів. Але якраз ця їх незвичайність відкрила цілий ряд можливостей. Крім того, у багатьох випадках КС, як квантові стани, дозволяють спрощувати квантову задачу, використовуючи наглядну класичну мову, оскільки володіють мінімальними невизначеностями.

Метод КС особливо ефективний, коли зв'язана з ним група є групою динамічної симетрії. Група Гайзенберга – найпростіший приклад такої групи (для квантового осцилятора під дією змінної зовнішньої сили). Але вона не універсальна: у багатьох задачах зустрічаються й інші, більш складні групи. Переломовим [2] поняття КС було узагальнено на довільну групу Лі. При цьому властивості КС тісно пов'язуються з теорією представлень груп (див. також [3]). Вони задаються точками в однорідних просторах, у яких діє група.

У книзі [2] проводиться систематичний виклад теорії КС, особливо для нижчих груп. Детально вивчається, також, система КС для групи *SO*(1,n) і детальніше – для груп Лоренца *SO*(1,2) і *SO*(1,3). У такому ж плані у даній роботі досліджується система КС для групи *SO*(1,4). У динамічному аспекті *SO*(1,4) відома у фізиці як динамічна група симетрії нерелятивістського атома водню. Тому природно виникає проблема розробки для неї теорії КС з метою подальшого активного впровадження її у фізичну проблематику.

Систему $SO(1,4)$ – КС конструюємо для виродженої серії унітарних представлень. При цьому сама група виступає у ролі групи рухів 4-вимірного простору Лобачевського $L^{(4)}$, який реалізується як поверхня верхньої порожнини 4-вимірного гіперболоїда $H^{(4)}$ в (1+4)- вимірному просторі Мінковського $M^{(1,4)}$.

Когерентні стани параметризуються точками простору $L^{(4)}$. Ретельно аналізуються отримані в [4] результати з гармонічного аналізу на $L^{(4)}$ і на цій основі вивчаються властивості $SO(1,4)$ – КС. Зокрема, проводяться розклади КС по базисних функціях незвідних унітарних представлень класу 1 групи $SO(1,4)$. Функції , за якими іде розклад скалярної «хвильової функції» у декартовій системі координат, представляють собою $SO(1,4)$ – КС. Вони інтерпретуються, як «плоскі хвилі» (називатимемо їх орисферичними хвилями), оскільки в евклідовій границі вони стають звичайними плоскими хвилями. Установлюємо диференціально-різницеве рівняння, що вони його задовольняють.

Показано, що КС не ортогональні один до одного. Їх скалярний добуток виражається через зональні $SO(1,4)$ – сферичні функції, зв'язані з приєднаними функціями Лежандра. Вводимо в розгляд конфігураційний простір, «канонічно спряжений» імпульсному простору Лобачевського $L_p^{(4)}$, а генератори трансляцій цього простору (оператори імпульсів $\tilde{p}$) - приводимо у явному вигляді. Знайдено, що спільний спектр цих операторів співпадає з простором $L_p^{(4)}$, а їх спільною власною функцією є орисферична хвиля. Досліджується також задача розсіяння, тісно переплетена із $SO(1,4)$ – КС. Знайдено у явному вигляді відповідну парціальну S-матрицю для такої задачі.

2. Група де Сіттера $SO(1,4)$ складається із усіх дійсних матриць п'ятого порядку з одиничним детермінантом, які залишають інваріантною квадратичну форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \equiv x_0^2 - \tilde{x}^2$, $\tilde{x} = (\boldsymbol{x}, x_4)$; $x = (x_0, \tilde{x})$ – точка (1+4)-вимірного псевдоевклідового простору Мінковського $M_x^{(1,4)}$. Алгебра $so(1, 4)$ групи $SO(1,4)$ натягується на базисні елементи

$$L_{rs} = -e_{rs} + e_{sr},\ L_{0r} = e_{0r} + e_{r0},\ \ s < r;\ \ s, r = 1, 2, 3, 4,$$

де e_{rs} – матриця з матричними елементами $(e_{rs})_{pq} = \delta_{rp}\delta_{sq}$. Для базисних елементів алгебри виконуються співвідношення переставності

$$[L_{ab}, L_{cd}] = g_{bc}L_{ad} + g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} - g_{bd}L_{ac},\ \ a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, 4,$$

де $g_{s0} = g_{0s} = \delta_{0s}$, $g_{rs} = -\delta_{rs}$; $r, s = 1, 2, 3, 4$. У групі є два незалежних оператори Казиміра

$$V = L^2_{12} + L^2_{13} + L^2_{14} + L^2_{23} + L^2_{24} + L^2_{34} - L^2_{01} - L^2_{02} - L^2_{03} - L^2_{04},$$

$$W = (L_{12}\,L_{24} - L_{13}\,L_{24} + L_{14}\,L_{23})^2 -$$
$$-(L_{02}\,L_{34} - L_{03}\,L_{24} + L_{04}\,L_{23})^2 - (L_{01}\,L_{34} - L_{03}\,L_{14} + L_{04}\,L_{13})^2 -$$
$$-(L_{01}\,L_{24} - L_{02}\,L_{14} + L_{04}\,L_{12})^2 - (L_{01}\,L_{23} - L_{02}\,L_{13} + L_{03}\,L_{12})^2.$$

Щоб мати справу із самоспряженими операторами, будемо замість елементів L_{ab} алгебри $so(1,4)$ розглядувати $J_{ab} = iL_{ab}$. Для десяти $so(1,4)$ – генераторів J_{ab} уведемо позначення:

$$\mathbf{M} = (M_1 \equiv J_{23}, M_2 \equiv J_{31}, M_3 \equiv J_{12}),\ \ \mathbf{P} = (P_1 \equiv J_{14}, P_2 \equiv J_{24}, P_3 \equiv J_{34}),$$
$$\mathbf{N} = (N_1 \equiv J_{01}, N_2 \equiv J_{02}, N_3 \equiv J_{03},),\ \ P_0 = J_{04}.$$

У цих позначеннях

$$V = (P_0^2 + \mathbf{N}^2) - (\mathbf{P}^2 + \mathbf{M}^2),\ \ W = (\mathbf{MP})^2 - (P_0\mathbf{M} - \mathbf{P}\times\mathbf{N})^2 - (\mathbf{MN})^2.$$

Комутаційні співвідношення для генераторів M_k, P_j, N_l, P_0 мають вигляд

$$[M_k, M_l] = i\varepsilon_{klm}M_m, [N_k, N_l] = -i\varepsilon_{klm}M_m, [P_k, P_l] = i\varepsilon_{klm}M_m,$$
$$[M_k, N_l] = i\varepsilon_{klm}N_m, [M_k, P_l] = i\varepsilon_{klm}P_m, [M_k, N_k] = [M_k, P_k] = [M_k, P_0] = 0,$$
$$[P_0, N_k] = iP_k, [P_0, P_k] = iN_k, [P_k, N_l] = i\delta_{kl}P_0,$$

де ε_{klm} – антисиметричний тензор третього рангу, який дорівнює 0 або ±1; $k, l, m = 1, 2, 3$.

Класифікація незвідних унітарних представлень групи $SO(1,4)$ інфінітезимальними методами була дана у роботі [5], а в глобальній формі (на основі теорії індукованих представлень Маккі) – у роботі [6]. Інший підхід до описання таких представлень приведений у [7]. У книзі [4] представлення основної унітарної серії розглядаються як окремий випадок побудованого там представлення $\pi^{\sigma l}$ основної неунітарної серії, яке характеризується парою чисел σ і l, де σ – комплексне число, l – ціле або напівціле, яким задається незвідне унітарне представлення підгрупи $SO(3) \subset SO(1,4)$. Для основної унітарної серії представлень групи $SO(1,4)$ $\sigma = -3/2 + ir$, $r \in R$. У роботі будемо мати справу тільки з тими представленнями $\pi^{\sigma l}$, для яких $l = 0$. Позначимо їх через π_σ. Представлення π_σ характеризуються тим, що містять одномірне (одиничне) представлення максимально компактної підгрупи $K = SO(4)$. Вони називаються представленнями класу 1 відносно підгрупи $SO(4)$ [8]. Це так звані максимально вироджені представлення. Для них власні значення інваріантних операторів V і W дорівнюють [7] $\nu(V) = \nu_r(V) = r^2 + 9/4$, $\nu(W) = 0$.

3. Згідно теорії, викладеної в [2] для групи G, система (узагальнених) КС – це множина векторів $\{| z_g >\}$ таких, що

$$| z_g > = T(g) | z_0 >, \qquad (1)$$

де g пробігає усю групу G; $T(g)$ – представлення групи G, а $| z_0 >$ – фіксований вектор у просторі, у якому діє представлення $T(g)$.

Властивості системи КС залежать від вибору вектора $| z_0 >$. Звичайна система КС відповідає вибору у ролі $| z_0 >$ вакуумного вектора $| 0 >$. Доречно тут підкреслити, що на відміну від інфінітезимального (дискретного) базису, породжуваного генераторами алгебри, базис КС породжується кінечними перетвореннями групи. А тому згідно формули (1), при кінечних перетвореннях узагальнені КС $| z >$ переходять у $| z' >$, а не в їх суперпозицію, на відміну від станів дискретного базису.

Нехай для вектора $| z_0 >$ існує стаціонарна компактна підгрупа $H \subset G$, тобто така, що для $h \in H$, $T(h)| z_0 > = \exp(i\alpha(h))| z_0 > \equiv | z_h >$ (коли H – некомпактна, то $T(h)| z_0 > = \exp\alpha(h)| z_0 >$). Тоді $| z_{gh} > = \exp(i\alpha(h))| z_g >$ для усіх $h \in H$. Тому вектори $| z_g >$, які відповідають одному лівому класу суміжності gH по H, описують один і той же базис. Систему КС утворюватиме сукупність векторів $\{| z_{g(x)} >\}$, де $x \in X = G/H$, $g(x)$ – представник групи G у класі x. Це означає, що таку систему КС можна параметризувати точками $x = x(g)$ фактор-простору $X = G/H$.

Дія оператора $T(g)$ на стан $| z_0 > = |0 >$ визначається формулою $T(g)| 0 > = \exp(i\alpha)| x_g >$, де $x \in X$, $\alpha = \alpha(g)$. Дія ж оператора $T(g')$ на КС $| x > = | x_g >$ приводить тоді до співвідношення $T(g')| x > = \exp(-i\alpha(g))T(gg')| 0 > = \exp(i\beta(g',g)) | g'x >$, де $\beta(g',g) = \alpha(g'g) - \alpha(g)$, а $x' = g'x$ і визначається дією G на X: $x' = x(g'g)$. Оскільки $\alpha(gh) = \alpha(g) + \alpha(h)$, то β залежить не від g, а від суміжного класу $x(g)$: $\beta(g',g) = \beta'(g',x)$.

Побудова системи КС суттєво залежить від вибору початкового стану $| z_0 >$. А тому, щоб квантові стани, які описують КС були близькі до класичних, необхідно вибирати $| z_0 >$ так, щоб відповідна система мала мінімальну невизначеність. Способи такого виділення розроблялись багатьма авторами. Відомості про це можна знайти в [2, 3, 9] (див. також огляди [10, 11]). Там широко представлені й інші результати із теорії і застосувань КС.

4. Незвідні представлення π_σ можна реалізувати у просторі D_σ нескінченно диференційованих функцій $F(\xi; \sigma)$ степеня однорідності σ, заданих на верхній порожнині конуса $[\xi, \xi] = \xi_0^2 - \vec{\xi}^{\,2} = 0$, $\xi_0 > 0$ [8]. Лінійні перетворення π_σ на D_σ, що відповідають лінійним перетворенням $\xi' = g\xi$ точок конуса задаються формулою $\pi_\sigma(g)F(\xi; \sigma) = F(g^{-1}\xi; \sigma)$, $g \in SO(1, 4)$. Легко бачити, що π_σ утворюють представлення групи

$SO(1,4)$. Із-за однорідності $F(\xi;\sigma)$ знаходимо, що $F(\xi;\sigma) = \xi_0^{\sigma} f(\tilde{\zeta})$, де $f(\tilde{\zeta}) \equiv F((1, \tilde{\xi}/\xi_0);\sigma) \equiv F((1, \tilde{\zeta});\sigma)$, $\tilde{\zeta} \in S^{(3)}$ ($S^{(3)} = \{\tilde{\zeta}:\tilde{\zeta}^2 = 1\}$). Звідси $F(\xi;\sigma)_{|\xi_0=1} = F((\xi_0, \tilde{\xi});\sigma)_{|\xi_0=1} \equiv f(\tilde{\zeta})$; $\xi_{|\xi_0=1} = (1,\tilde{\zeta})$. Аналогічно, $F((g^{-1}\xi);\sigma)_{|\xi_0=1} = \omega_g{}^{\sigma} F((1, \tilde{\zeta}_g);\sigma) \equiv \omega_g{}^{\sigma} f(\tilde{\zeta}_g)$, де $\tilde{\zeta}_g = ((g^{-1\tilde{}}\xi)/(g^{-1}\xi_0))_{|\xi_0=1}$, ω_g – перша координата точки $g^{-1}\xi$ при $\xi_0 = 1$. Це дає можливість реалізувати представлення π_σ як представлення групи $SO(1,4)$ у просторі квадратично інтегрованих функцій на одиничній сфері $S^{(3)}$:

$$\pi_\sigma(g) f(\tilde{\zeta}) = \omega_g^{\sigma} f(\tilde{\zeta}_g). \tag{2}$$

Це представлення унітарне відносно скалярного добутку $(f_1, f_2) = \int_{S^{(3)}} d\mu(\tilde{\zeta}) f_1(\tilde{\zeta}) f_2(\tilde{\zeta})$ при $\sigma = -3/2 + ir$ і унітарно еквівалентне представленню $\pi_{\sigma = -3/2 + ir} \equiv T^r$. У сферичних координатах δ, θ, φ $(0 \le \delta, \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$ на $S^{(3)}$

$$\begin{gathered}\tilde{\zeta} = (\sin\delta\sin\theta\cos\varphi, \sin\delta\sin\theta\sin\varphi, \sin\delta\cos\theta, \cos\delta),\\ d\mu(\tilde{\zeta}) = (1/2\pi^2)\sin^2\delta\sin\theta\, d\delta\, d\theta\, d\varphi.\end{gathered} \tag{3}$$

Покажемо, що величину ω_g у (2) можна представити як білінійну форму у просторі $M_x^{(1,4)}$. Дійсно, задамо в $M_x^{(1,4)}$ білінійну форму $[x, y] = x_0 y_0 - \tilde{x}\tilde{y}$. Вона, очевидно, інваріантна відносно перетворень $g \in SO(1,4)$: $[x, y] = [gx, gy]$. Нехай x – точка верхньої порожнини гіперболоїда $X = SO(1,4)/SO(4) \sim H_+^{(4)}$: $[x, x] = x_0^2 - \tilde{x}^2 = 1$, $x_0 > 0$. Позначимо через $\hat{x}$ точку гіперболоїда $H_+^{(4)}$ з координатами (1, 0): $\hat{x} = (1, 0)$. Оскільки $SO(1,4)$ – група рухів $H_+^{(4)}$, то $x = g_x\hat{x} = g\hat{x}$, де $g = g_x k \in SO(1,4)$, $k \in SO(4)$. Нехай ξ – точка конуса $C_+^{(4)}$: $[\xi, \xi] = \xi_0^2 - \tilde{\xi}^2 = 0$, $\xi_0 > 0$, а $\xi_g = g^{-1}\xi$. З урахуванням $SO(1,4)$ – інваріантності білінійної форми $[x, \xi]$ в $M_x^{(1,4)}$ маємо $\xi_{0g} = [\hat{x}, g^{-1}\xi] = [g\hat{x}, \xi] = [x, \xi]$. І тоді $\xi_{0g_{|\xi_0=1}} = [x, \xi]_{|\xi_0=1}$. А тому ω_g можемо представити як $\omega_g = \xi_{0g_{|\xi_0=1}} = [x, \xi]_{|\xi_0=1} = [x, (1, \tilde{\zeta})] = x_0 - \tilde{x}\,\tilde{\zeta}$, де було покладено $\xi_{|\xi_0=1} = (1, \tilde{\zeta})$, $\tilde{\zeta} \in S^{(3)}$: $\tilde{\zeta}^2 = 1$. Тепер формула (2) набуває вигляду

$$T^r(g) f(\tilde{\zeta}) = (x_0 - \tilde{x}\tilde{\zeta})^{-3/2+ir} f(\zeta_g). \tag{4}$$

Підгрупу $SO(4) \subset SO(1,4)$ можна розглядати як стаціонарну підгрупу вектора $|z_0> = f_0(\tilde{\zeta}) = 1$. Діючи на цей вектор операторами представлення $T^r(g) = T^r(g_x k) = T^r(g_x)T^r(k)$ і враховуючи його інваріантність відносно дії $T^r(k)$, на основі (2) у відповідності із загальною теорією (див.п.3) отримуємо систему КС для представлень групи $SO(1,4)$ основної унітарної серії

$$|x> \equiv f_x^r(\tilde{\zeta}) = T^r(g_x) f_0(\tilde{\zeta}) = (x_0 - \tilde{x}\tilde{\zeta})^{-3/2+ir} \equiv \Phi_{\tilde{\zeta}}^r(x). \tag{5}$$

5. Бачимо, що побудована $SO(1,4)$-система КС параметризується точками x гіперболоїда $H_+^{(4)}$ такими, що $x_0^2 - \tilde{x}^2 = 1$, $x_0 > 0$, тобто $x = (\sqrt{1+\tilde{x}^2}, \tilde{x})$ і $x^2 = [x, x] = 1$. Множина таких точок реалізує 4-вимірний простір Лобачевського $L_{\tilde{x}}^{(4)}$, який також називатимемо простором де Сіттера. У цій реалізації рівняння $[x, \xi] = \mu = \text{const} > 0$, де $[\xi, \xi] = 0$ ($\xi_0 > 0$), задає рівняння орисфери O у просторі $L_x^{(4)}$. При заміні $\xi \to \alpha\xi$, $\mu \to \alpha\mu$, де $\alpha > 0$, одержимо рівняння тої ж орисфери O: $[x, \xi] = \mu$. А тому пару (ξ, μ) можна розглядати, як систему координат, які задають орисферу [12]. Характерною властивістю орисфери є те, що її внутрішня геометрія є евклідовою. При фіксованому $\xi = (1, \tilde{\zeta})$ функція $\Phi_\zeta{}^r(x)$ є постійною на орисферах: $\Phi_\zeta(x) = x_0 - \tilde{x}\tilde{\zeta} = \text{const}$. Якщо параметризувати $L_x^{(4)}$ так, що $x_0 = \operatorname{ch}\lambda$, $\tilde{x} = (\operatorname{sh}\lambda)\tilde{\eta}$, $\tilde{\eta}^2 = 1$, $\lambda \ge 0$ (сферична система координат S), то рівняння орисфери матиме вигляд $\operatorname{ch}\lambda - \operatorname{sh}\lambda(\tilde{\zeta}\tilde{\eta}) = \text{const}$. Таким чином, розглядувана нами система КС задається орисферними ядрами $\Phi_{\tilde{\zeta}}(\tilde{x}) = \sqrt{1+\tilde{x}^2} - \tilde{x}\tilde{\zeta}$.

У системі S $\Phi_{\tilde{\zeta}}(\tilde{x}) = |e^{\lambda/2}\sin\varphi/2 + ie^{-\lambda/2}\cos\varphi/2|^2$, $|\Phi_{\tilde{\zeta}}{}^r(\tilde{x})| = |e^{\lambda/2}\sin\varphi/2 + ie^{-\lambda/2}\cos\varphi/2|^{-3}$, де φ визначається співвідношеням $\cos\varphi = (\tilde{\zeta}\tilde{\eta})$.

6. Розглянемо деякі інші властивості уведених КС. У загальному випадку нескінченно диференційовані функції на $H_+^{(4)}$ перетворюються по квазирегулярному представленню $T(g)$ групи $SO(1,4)$. Якщо такими вважати $\Phi_\xi{}^r(\tilde{x}) = \Phi_\xi{}^r(x) \equiv |\, x >$, то матимемо $T(g)|\, x > = |\, x_g >$, де $x_g = g^{-1} x$. Можна сказати, що група $SO(1,4)$ на множині КС діє транзитивно. Дія оператора незвідного представлення $T^r(g)$ на КС $f_x^r(\tilde{\xi}) \equiv |\, \tilde{\xi} >$, розглядувані як функції $\tilde{\xi} \in S^{(3)}$, задаються формулою (4). Два когерентні стани $|\, x_1 >$ і $|\, x_2 >$ не ортогональні один одному. Їх скалярний добуток

$$< x_1 \,|\, x_2 > = (f_0, T^r(g_1^{-1} g_2) f_0) = (f_0, T^r(g) f_0) = < 0 \,|\, T^r(g) \,|\, 0 >, \tag{6}$$

де $g = g_1{}^{-1} g_2$. Представимо груповий елемент у вигляді [8] $g = k_1 g_{04}(\lambda) k_2$, де $k_1, k_2 \in K = SO(4)$. Ураховуючи, що K – стаціонарна підгрупа початкового стану, беручи до уваги, визначення скалярного добутку (f_1, f_2) і формули (3) і (4), знаходимо

$$< x_1 \,|\, x_2 > = \int_{S^{(3)}} d\mu(\tilde{\zeta}) [g_{04}(\lambda)\hat{x}, (1, \tilde{\zeta})]^{-3/2+ir} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\delta \sin^2\delta (\mathrm{ch}\lambda - \mathrm{sh}\lambda \cos\delta)^{-3/2+ir}. \tag{7}$$

Тут ми взяли до уваги також те, що представлення T^r і T^{-r} унітарно еквівалентні одне одному. «Кут» $\lambda \geq 0$ можна розглядати як відстань між точками $x_1 = g_1 \hat{x}$ і $x_2 = g_2 \hat{x}$ гіперболоїда: $\mathrm{ch}\,\lambda = [x_1, x_2] = x_{10} x_{20} - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$. Інтеграл у правій частині (7) є частковим випадком інтеграла $J_j^\sigma(a)$ із §5, стор. 137, в [4] при $j = 0$, $\sigma = -3/2 + ir$, $a = \lambda$. У результаті знаходимо

$$< x_1 \,|\, x_2 > = e^{-\lambda(3/2+ir)}\, {}_2F_1(3/2 + ir; 3/2; 3; 1 - e^{-2\lambda}) = (\mathrm{sh}\lambda)^{-1} P^{-1}_{-1/2+ir}(\mathrm{ch}\lambda) \equiv \varphi_r(\lambda), \tag{8}$$

де ${}_2F_1(\cdots; z)$ – гіпергеометрична функція, $P_\nu{}^m(z)$ – приєднана функція Лежандра. Як видно із (6), $\varphi_r(\lambda)$ – це зональна сферична функція представлення $T^r(g)$. У книзі [4] у різних системах координат були знайдені ортогональні системи функцій на $H_+^{(4)}$ – базисні функції представлень. Кожна з них конструювалась як спільна власна функція повного набору взаємокомутуючих операторів – операторів Казиміра групи $SO(1,4)$ і її підгруп, що входять у відповідний ланцюжок звужень $SO(1,4)$ на ці підгрупи. Наприклад, у сферичній системі координат S ($x_0 = \mathrm{ch}\,\lambda$, $\tilde{x} = (\mathrm{sh}\,\lambda)\,\tilde{\eta}$, $\tilde{\eta}^{\,2} = 1$), цими операторами є $V = -\Delta_L(\mathrm{H}_+^{(4)})$, $\mathbf{J}^2 = \mathbf{M}^2 + \mathbf{P}^2$, $\mathbf{M}^2$ і M_3 ($\Delta_L(H_+^{(4)})$ – оператор Лапласа на $H_+^{(4)}$) із власними значеннями

$$\nu(\Delta_L(H_+^{(4)})) = -(r^2 + 9/4),\ \nu(\mathbf{J}^2) = j(j+2),\ \nu(\mathbf{M}^2) = l(l+1),\ \nu(M_3) = m, \tag{9}$$
$$r \geq 0,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots,\ \ 0 \leq l < j,\ \ -l \leq m \leq l.$$

Вони відповідають звуженню $SO(1,4) \supset SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2)$. Лапласіан у сферичній системі координат S

$$\Delta_L(H_+^{(4)}) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + 3\mathrm{cth}\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\Delta_L(S^3)}{\mathrm{sh}^2\lambda}, \tag{10}$$

де враховано, що $\mathbf{J}^2 = -\Delta_L(S^{(3)})$, $\Delta_L(S^{(3)})$ – оператор Лапласа на одиничній сфері $S^{(3)}$: $\tilde{\eta}^2 = 1$. Приведемо ще приклад циліндричної системи координат C на $H_+^{(4)}$: $x_0 = \mathrm{ch}\,\lambda\ \mathrm{ch}\,b$, $\mathbf{x} = (\mathrm{sh}\,\lambda)\mathbf{n}$, $x_4 = \mathrm{ch}\,\lambda\ \mathrm{sh}\,b$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $0 \leq \lambda < \infty$, $-\infty < b < \infty$. У цій системі оператор $\Delta_L(H_+^{(4)})$ має вигляд

$$\Delta_L(H_+^{(4)}) = \frac{1}{\mathrm{ch}\lambda\,\mathrm{sh}^2\lambda} \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathrm{ch}\lambda\,\mathrm{sh}^2\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\Delta_L(S^{(2)})}{\mathrm{sh}^2\lambda}. \tag{11}$$

З ним комутують оператори $\mathbf{M}^2 = -\Delta_L(S^{(2)})$, M_3, P_0 зі власними значеннями $\nu(\mathbf{M}^2) = l(l+1)$, $\nu(M_3) = \mathrm{m}$, $\nu(P_0) = \tau$, де $l = 0, 1, 2, \ldots, -l \leq m \leq l$, $-\infty < \tau < \infty$; $\Delta_L(S^{(2)})$ – оператор Лапласа на двовимірній сфері $S^{(2)}$: $\mathbf{n}^2 = 1$. Разом ці оператори утворюють повний набір взаємокомутуючих операторів для циліндричної системи C (редукція $SO(1,4) \supset SO(1,1) \otimes SO(3) \supset SO(2)$; символ $\otimes$ означає прямий добуток).

7. Базисні функції можна знайти також у результаті обчислень інтеграла [4]

$$\Theta_K^r(x) = \int_\Gamma d\mu(\xi') \Xi_K(\xi') [x, \xi']^{-3/2-ir}, \tag{12}$$

де Γ – контур інтегрування на конусі $C_+^{(4)}[\xi, \xi] = 0$ ($\xi_0 > 0$), який перетинає по одному разу усі його твірні; $\xi' \in \Gamma$; $\Xi_K(\xi')$ – ортонормовані функції на ньому. Наприклад, у сферичній системі координат у ролі Γ можна взяти сферу $S^{(3)}$ – перетин конуса із площиною $\xi_0 = 1$. Тоді $\xi' = (1, \tilde{\zeta})$, $\tilde{\zeta}^2 = 1$. Розрахунки дають результат [4]

$$\Theta^r_{jlm}(x) = \int_{S^{(3)}} d\mu(\tilde{\zeta}) Y_{jlm}(\tilde{\zeta})[x, (1, \tilde{\zeta})]^{-3/2-ir} = \\ = (-1)^j (j+1)[\Gamma(ir-1/2)/\Gamma(ir-j-1/2)]\mathrm{sh}^{-1}\lambda\, P^{-1-j}_{-1/2+ir}(\mathrm{ch}\lambda) Y_{jlm}(\tilde{\eta}), \tag{13}$$

де j, l, m – квантові числа, зв'язані з інваріантами підгруп $SO(4)$, $SO(3)$, $SO(2)$, відповідно, а Y_{jlm} – $SO(4)$ – сферична функція. Якщо параметризувати $\tilde{\eta} = (\boldsymbol{\eta}, \eta_4)$ таким чином, що $\boldsymbol{\eta} = (\sin\gamma)\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^2 = 1$, а $\eta_4 = \cos\gamma$, то $Y_{jlm}(\tilde{\eta})$ зможемо представити у вигляді $Y_{jlm}(\tilde{\eta}) = Z_{jl}(\gamma) Y_{lm}(\mathbf{n})$, де

$$Z_{jl}(\gamma) = [(j+1)\Gamma(j+l+2)/\Gamma(j-l+1)]^{1/2}(\sin\gamma)^{-1/2} P^{-l-1/2}_{j+1/2}(\cos\gamma),$$

$Y_{lm}(\mathbf{n})$ – $SO(3)$ – сферична функція. Умова ортогональності для Y_{jlm}: $< Y_{j'l'm'} \mid Y_{jlm} >= \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

У випадку C – системи у ролі контура Γ слід взяти Γ_C – перетин конуса $[\xi, \xi] = 0$ з циліндром $\xi_0^2 - \xi_4^2 = 1$. Параметризуємо його наступним чином: $\xi_0 = \mathrm{ch}\, c$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}^2 = 1$), $\xi_4 = \mathrm{sh}\, c$, $-\infty < c < \infty$. Тоді знайдемо, що [4]

$$\Theta^r_{\tau lm}(x) = \int_{\Gamma_C} dc\, d\mu(\mathbf{v})\, \Phi^\tau_{lm}(c; \mathbf{v})[x, \xi']^{-3/2-ir} = \\ = [2^{3/2+ir}\pi^{3/2}\Gamma(A)\Gamma(B)\mathrm{th}^l\lambda\, (\mathrm{ch}\lambda)^{3/2+ir}/\Gamma(D)\Gamma(l+3/2)]\; {}_2F_1(A, B; D; \mathrm{th}^2\lambda)\Phi^\tau_{lm}(b; \mathbf{n}), \tag{14}$$

де $A \equiv (3 + ir + l + i\tau)/2$, $B \equiv (3 + ir + l - i\tau)/2$, $D \equiv l + 3/2$, а

$$\Phi^\tau_{lm}(b; \mathbf{n}) = (1/2\pi)^{1/2} \exp(i\tau c) Y_{lm}(\mathbf{n}),$$
$$< \Phi^{\tau'}_{l'm'} \mid \Phi^\tau_{lm} > = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(\tau - \tau').$$

Умови нормування для $\Theta^r_{jlm}(x)$ і $\Theta^r_{\tau lm}(x)$ мають вигляд

$$< \Theta^{r'}_{j'l'm'} \mid \Theta^r_{jlm} >= \frac{\delta(r-r')}{r(r^2+1/4)\mathrm{th}\pi r}\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'},$$
$$< \Theta^{r'}_{\tau' l'm'} \mid \Theta^r_{\tau lm} >= \frac{\delta(r-r')}{r(r^2+1/4)\mathrm{th}\pi r}\delta(\tau-\tau')\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Випишемо тут також вирази для інваріантної міри $d\mu(x) = d^4\tilde{x}/\sqrt{1+\tilde{x}^2}$ в просторі Лобачевського $L^{(4)}_{\tilde{x}}$ у координатах S– і C– систем: $d\mu(x_S) = \mathrm{sh}^3\lambda d\lambda d\mu(\tilde{\zeta})$, $d\mu(x_C) = \mathrm{sh}^3\lambda d\lambda d\mu(\mathbf{n}) db$. У координатах δ, θ, φ на сфері $\tilde{\zeta}^2 = 1$ вираз $d\mu(\tilde{\zeta})$ приведений в (3). Якщо у C– системі координати θ, φ параметризують двовимірну сферу $S^{(2)}$: $\mathbf{n}^2 = 1$, то матимемо $x_1 = n_1 = \sin\theta\sin\varphi$, $x_2 = n_2 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_3 = n_3 = \cos\theta$, $d\mu(\mathbf{n}) = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

"Радіальна" частина базисної функції у кожній координатній системі на $H_+^{(4)}$ відповідає "радіальній" частині оператора Лапласа $\Delta_L(H_+^{(4)})$, вираженого в координатах цієї системи. Із інтеграла в (13) вона одержується при певному виборі точки $x \in H_+^{(4)}$. Наприклад, для S-системи $x = \bar{x}(\lambda) = (\mathrm{ch}\,\lambda, \mathbf{0}, \mathrm{sh}\,\lambda)$. У цій системі координат вона має вигляд

$$R^r_j(\lambda) = (-1)^j (j+1)[\Gamma(ir-1/2)/\Gamma(ir-j-1/2)]\mathrm{sh}^{-1}\lambda\, P^{-1-j}_{-1/2+ir}(\mathrm{ch}\lambda) \tag{15}$$

і є розв'язком диференціального рівняння

$$\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^3\lambda}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{sh}^3\lambda\frac{d}{d\lambda} - \frac{j(j+2)}{\mathrm{sh}^2\lambda}\right)R^r_j(\lambda) = -\left(r^2 + \frac{9}{4}\right)R^r_j(\lambda). \tag{16}$$

Функція $\varphi_r(\lambda)$ у (8) задовольняє рівняння (16) при значенні $j = 0$. Легко бачити, що $R^r_j(0) = (-1)^j(j+1)(\Gamma(ir-1/2)/\Gamma(ir-j-1/2))$. При $j = 0$ $R^r_0(0) = 1$.

У циліндричній системі C "радіальна" частина базисної функції $\Theta^r_{\tau lm}(x)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2}+(\mathrm{th}\lambda+2\mathrm{cth}\lambda)\frac{d}{d\lambda}-\frac{\tau^2}{\mathrm{ch}^2\lambda}-\frac{l(l+1)}{\mathrm{sh}^2\lambda}\right)R^r_{\tau,l}(\lambda)=-\left(r^2+\frac{9}{4}\right)R^r_{\tau,l}(\lambda). \tag{17}$$

З точністю до числових множників її дає (13) при $x = \breve{x}\,(\lambda) = (\mathrm{ch}\,\lambda, 0, 0, -\mathrm{sh}\,\lambda, 0)$:

$$R^r_{\tau,l}(\lambda)=(2l+1)^{1/2}\,2^{1/2+ir}\,\frac{\Gamma(A)\Gamma(B)\,\mathrm{th}^l\lambda\,(\mathrm{ch}\lambda)^{-3/2-ir}}{\Gamma(3/2+ir)\Gamma(l+3/2)}\;{}_2F_1(A,B;D;\mathrm{th}^2\lambda), \tag{18}$$

де A, B, D такі ж, як і в (14).

8. У роботах [4, 13, 14] методами інтегральної геометрії були побудовані формули розкладу скалярної функції $\Psi(x) \in L^2(H_+^{(4)})$ у різних системах координат на $H_+^{(4)} \sim L_{\breve{x}}^{(4)}$. Їх можна застосувати до КС. Приведемо такі розклади для S – і C – систем. Інші записуються аналогічно. Маємо $(\Psi(x) \equiv |\, x>)$

$$|\, x> = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Theta^r_{jlm}(x)\,|\, jlm> \qquad (S-\text{система}), \tag{19}$$

$$|\, x> = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\;\Theta^r_{\tau lm}(x)\,|\,\tau lm> \qquad (C-\text{система}). \tag{20}$$

Ясно, що можна так нормувати КС, щоб $\Theta_K{}^r(x)$ – функції задовольняли умові повноти у такому вигляді, коли справа стоїть 1. Наприклад, $\Sigma_{j,l,m}|\Theta_{jlm}{}^r\,(x)|^2 = 1$.

Відмітимо тут, що асимптотика радіальної функції $R^r(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ у кожній системі координат на $H_+^{(4)}$ дає можливість установити явно коефіцієнт, на який треба помножити базисну функцію на $H_+^{(4)}$, щоб її можна було нормувати на $\delta(r - r')$ – функцію [4].

У ролі базисних векторів $|\, jlm >$ у формулі (19) можна взяти систему ортонормованих сферичних функцій $\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta})$ групи $SO(4)$. Вони є власними функціями взаємокомутуючих операторів $\mathbf{J}^2 = \mathbf{M}^2 + \mathbf{P}^2$, $\mathbf{M}^2$ і M_3. Помножимо на $\overline{\mathrm{Y}_{j'l'm'}(\tilde{\zeta})}$ обидві частини (19) і проінтегруємо по сфері $\tilde{\zeta}^2 = 1$. Використовуючи умову ортогональності $\int_{S^{(3)}} d\mu(\tilde{\zeta})\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta})\overline{\mathrm{Y}_{j'l'm'}(\tilde{\zeta})} = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$ функцій $\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta}\,)$ приходимо до інтегрального представлення для $\Theta^r_{jlm}(x)$:

$$\Theta^r_{jlm}(x)=\int_{\Gamma_S}d\mu(\tilde{\zeta})\,\overline{\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta})}\,(x_0-\tilde{x}\tilde{\zeta})^{-3/2-ir}=\int_{\Gamma_S}d\mu(\tilde{\zeta})\,\overline{\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta})}[x,\xi']^{-3/2-ir}, \tag{21}$$

де $\xi' = (1, \tilde{\zeta}\,)$ – точка сферичного контура Γ_S – перетину конуса $[\xi, \xi] = 0$ із площиною $\xi_0 = 1$.

При $j = l = m = 0$ $\quad \Theta^r_{000}(\lambda)=\dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{\pi}d\delta\sin^2\delta\,(\cos\lambda-\mathrm{sh}\lambda\cos\delta)^{-3/2-ir}$.

Аналогічним чином можна одержати інтегральне представлення для функцій $\Theta^r_{\tau lm}(x)$ у циліндричній системі C:

$$\Theta^r_{\tau lm}(x)=\int_{\Gamma_C}d\mu(\xi')\,\overline{\Phi^{\tau}_{lm}(\xi')}[x,\xi']^{-3/2-ir}.$$

Тут $\xi' = \xi'(c, \mathbf{n}) \in \Gamma_C$, $\mathbf{n} = (\sin\vartheta\sin\phi\,,\ \sin\vartheta\cos\phi\,,\ \cos\vartheta\,)$, $0 \le \vartheta < \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$. Зокрема, для значення $m = 0$ маємо

$$\Theta^r_{\tau l0}(x)=\pi(2l+1)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dc\,e^{i\tau c}\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta(\mathrm{ch}\lambda\,\mathrm{ch}c-\mathrm{sh}\lambda\cos\vartheta)^{-3/2-ir}P_l(\cos\vartheta).$$

Поклавши у формулі (19) $|\, jlm > = \mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta})$, перепишемо її так:

$$\Phi^r_{\tilde{\zeta}}(x)=[\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{sh}\lambda\,(\tilde{\eta}\tilde{\zeta})]^{-3/2+ir}=\sum\nolimits_{jlm}R^r_j(\lambda)\,\overline{\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\eta})}\;\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta}). \tag{22}$$

За теоремою додавання $SO(4)$ – сферичних функцій (див. [8])

$$\sum_{l,m} \overline{\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\eta})}\mathrm{Y}_{jlm}(\tilde{\zeta}) = (j+1)\frac{\sin(j+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

де $\cos\varphi = (\tilde{\eta}\tilde{\zeta})$. А тому (22) набуває тепер такого вигляду:

$$[\mathrm{ch}\lambda - \mathrm{sh}\lambda(\tilde{\eta}\tilde{\zeta})]^{-3/2+ir} = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^r(\lambda)(j+1)\frac{\sin(j+1)\varphi}{\sin\varphi}. \quad (23)$$

Цю рівність можна розглядати як генеруючу функцію для функцій $R_j^r(\lambda)$. Коли $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$ $(\tilde{\eta}\tilde{\zeta}) = 1$ або $(\tilde{\eta}\tilde{\zeta}) = -1$, (23) дає

$$e^{\mp(-3/2+ir)\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (\pm)^j (j+1)^2 R_j^r(\lambda). \quad (24)$$

При $\varphi = \pi/2$ $(\tilde{\eta}\tilde{\zeta}) = 0$ приходимо до рівності

$$(\mathrm{ch}\lambda)^{-3/2+ir} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) R_{2j}^r(\lambda). \quad (25)$$

Використовуючи формули (8.11.1 і (15.3.6) в [15], функцію конуса $P_{-1/2+ir}^{-j-1}(\mathrm{ch}\lambda)$ в (15) можна представити наступним чином:

$$P_{-1/2+ir}^{-j-1}(\mathrm{ch}\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-2\lambda}\right)^{j+1}\left[\frac{\Gamma(ir)e^{(-3/2+ir)\lambda}}{\Gamma(3/2+ir+j)}\ {}_2F_1\left(\frac{3}{2}+j, \frac{3}{2}+j+ir; 1+ir; e^{-2\lambda}\right) + k.c.\right].$$

З урахуванням цього співвідношення, установлюємо, що при $\lambda \to \infty$

$$R_j^r(\lambda) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}(-1)^j(j+1)\frac{|\Gamma(ir-1/2)|}{|\Gamma(ir-j-1/2)|}\left(\frac{\Gamma(ir)}{\Gamma(3/2+ir+j)}e^{(-3/2+ir)\lambda} + k.c.\right). \quad (26)$$

Тоді формула (23) розкладу $SO(1,4)$ – когерентного стану при $\lambda \to \infty$ набуває вигляду

$$\begin{aligned}(\mathrm{ch}\lambda - \mathrm{sh}\lambda\cos\varphi)^{-3/2+ir} &\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}|\Gamma(ir-1/2)|e^{-(3/2)\lambda} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(j+1)}{|\Gamma(ir-j-1/2)|}&\frac{\sin\varphi(j+1)}{\sin\varphi}\left(\frac{\Gamma(ir)}{\Gamma(ir+j+3/2)}e^{ir\lambda} + k.c.\right).\end{aligned} \quad (27)$$

Аналогічно можна отримати асимптотичні вирази при $\lambda \to \infty$ розкладів (24) і (25).

9. Представимо (16) у такій формі:

$$\left(\mathrm{sh}^{-3/2}\lambda\frac{d^2}{d\lambda^2}\mathrm{sh}^{3/2}\lambda - [j(j+2)+3/4]\mathrm{sh}^{-2}\lambda\right)R_j^r(\lambda) = -r^2 R_j^r(\lambda).$$

Переконуємось, що функція $\Psi_j^r(\lambda) = \mathrm{sh}^{3/2}\lambda\ \mathrm{R}_j^r(\lambda)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\left(-\frac{d^2}{d\lambda^2} + [j(j+2)+3/4]\mathrm{sh}^{-2}\lambda\right)\Psi_j^r(\lambda) = r^2\Psi_j^r(\lambda).$$

Воно має вигляд рівняння Шредінгера для задачі розсіяння в потенціалі у формі $V_j(\lambda) = [\ j(\ j+2\ )+3/4]\ \mathrm{sh}^{-2}\lambda$. Із (26) випливає асимптотичний вираз функції $\Psi_j^r(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$:

$$\begin{aligned}\Psi_j^r(\lambda) &\sim C_j(\lambda)\exp(ir\lambda) + C_j(-\lambda)\exp(-ir\lambda), \\ C_j(\lambda) &= \left(2/\sqrt{\pi}\right)(-1)^j(j+1)\Gamma(ir)\,|\,\Gamma(ir-1/2)\,|\,/|\Gamma(ir-j-1/2)|\Gamma(ir+j+3/2).\end{aligned} \quad (28)$$

А тому парціальна S-матриця для даної задачі розсіяння має вигляд (див. [2])

$$S_j(\lambda) = -C_j(\lambda)/C_j(-\lambda) = \Gamma(ir)\Gamma(-ir+j+3/2)/\Gamma(-ir)\Gamma(ir+j+3/2).$$

Як бачимо, у неї є полюси у точках $r = in$, $n = 1, 2,\ldots$, і $r = i(m-j-3/2)$, $m = 1, 2,\ldots$.

10. Результати роботи [16] (формули (5.12), (5.13)) дають нам можливість установити (в унітарному випадку) пряму і обернену формули розкладу функції $f(x) \in L^2(H_+^{(4)})$ по системі SO(1, 4) – КС у вигляді

$$f(x) = (2\pi)^{-4} \int d\mu(r)\, d\mu(\tilde{\zeta})\, \hat{f}(\tilde{\zeta}; r)(x_0 - \tilde{x}\tilde{\zeta})^{-3/2-ir}, \tag{29}$$

$$\hat{f}(\tilde{\zeta}; r) = \int d\mu(x)\, f(x)(x_0 - \tilde{x}\tilde{\zeta})^{-3/2+ir}. \tag{30}$$

Тут $\hat{f}(\tilde{\zeta}; r) = \Phi(\xi_{|\xi_0=1}; r) = \Phi((1, \tilde{\zeta}); r)$, де $\Phi(\xi; r)$ – однорідна степеня однорідності – $3/2+ir$ функція, задана на конусі $[\xi, \xi] = \xi_0^2 - \tilde{\xi}^2 = 0$, $\xi_0 > 0$; $d\mu(x)$ – інваріантна міра в $L_{\tilde{x}}^{(4)}$, $d\mu(\tilde{\zeta})$ – елемент "тілесного кута" у просторі одиничних векторів $\tilde{\zeta}$: $\tilde{\zeta}^2 = 1$; $d\mu(r) = r(r^2 + 1/4)\mathrm{th}\,\pi r dr$ – міра Планшереля на множині класів еквівалентності незвідних унітарних представлень $T^r(g)$. Інтегрування по r у (29) іде від 0 до ∞ (ми скористались унітарною еквівалентністю представлень $T^r(g)$ і $T^{-r}(g)$. Із цих формул випливає, що розглядувана система КС є повною і ортогональною:

$$(2\pi)^{-4} \int d\mu(x)\, \overline{\Phi_{\tilde{\zeta}}^r(x)}\, \Phi_{\tilde{\zeta}'}^{r'}(x) = (\mathrm{cth}\pi r / r(r^2 + 1/4))\, \delta(r - r')\, \delta(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}'), \tag{31}$$

$$(2\pi)^{-4} \int d\mu(r)\, d\mu(\tilde{\zeta})\, \overline{\Phi_{\tilde{\zeta}}^r(x)}\, \Phi_{\tilde{\zeta}}^r(x') = \sqrt{1 + \tilde{x}^2}\, \delta(x - x'). \tag{32}$$

На основі формули Тейлора з розкладу функції $y = y(r)$ у степеневий ряд уведемо у розгляд оператор скінченого зсуву $\exp(ad/dr)$: $\exp(ad/dr)y(r) = y(r+a)$. Подіємо операторами $\exp(\pm id/dr)$ на функцію $\mathrm{R}_j^r(\lambda)$ в (15), представивши її у вигляді $\mathrm{R}_j^r(\lambda) = A_j^r(\lambda)P_\nu^\mu(\mathrm{ch}\,\lambda)$, де $\mu = -j - 1$, $\nu = ir - 1/2$. Знаходимо

$$\exp(id/dr)R_j^r(\lambda) = A_j^r(\lambda)[(-ir + j + 3/2)/(-ir + 3/2)]P_{\nu-1}^\mu(\mathrm{ch}\lambda),$$

$$\exp(-id/dr)R_j^r(\lambda) = A_j^r(\lambda)[(-ir + 1/2)/(-ir + j + 1/2)]P_{\nu+1}^\mu(\mathrm{ch}\lambda).$$

Скориставшись цими рівностями й рекурентним співвідношенням для функцій Лежандра 1-го роду $P_\nu^\mu(z)$ у вигляді:

$$(\nu - \mu + 1)P_{\nu+1}^\mu(z) + (\nu + \mu)P_{\nu-1}^\mu(z) = (2\nu + 1)zP_\nu^\mu(z),$$

безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості такого "диференціального" рівняння для $\mathrm{R}_j^r(\lambda)$ (див. також [17]):

$$\left[2\left(\mathrm{ch}i\frac{d}{dr}\right) + \frac{3i}{r}\mathrm{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{j(j+2)}{ir(-ir+1/2)}e^{id/dr} - 2\mathrm{ch}\lambda\right]R_j^r(\lambda) = 0. \tag{33}$$

Коли $j = 0$ йому задовольняє функція $\varphi_r(\lambda)$ із (8):

$$\left[2\mathrm{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{3i}{r}\mathrm{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) - 2\mathrm{ch}\lambda\right]\varphi_r(\lambda) = 0.$$

Рівняння (33) можна розглядати як рівняння у скінченних різницях. Установимо тепер скінченнорізницеве рівняння для КС. Позначимо через $\Delta_{\tilde{\zeta}}$ оператор Лапласа на сфері $S^{(3)}$ ($S^{(3)} = \{\tilde{\zeta} : \tilde{\zeta}^2 = 1\}$ із власним значенням $\nu_j(\Delta_{\tilde{\zeta}}) = -\nu_j(\mathbf{J}^2) = -j(j+2)$. Тоді на основі (33), маючи на увазі (23), отримуємо рівняння у скінченних різницях для $SO(1,4)$ – КС:

$$\left[2\mathrm{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{3i}{r}\mathrm{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{\Delta_{\tilde{\zeta}}}{ir(ir-1/2)}e^{id/dr} - 2\mathrm{ch}\lambda\right]\Phi_{\tilde{\zeta}}^r = 0. \tag{34}$$

11. Розглянемо в (1+4)-вимірному імпульсному просторі Мінковського $M_p^{(1,4)}$ рівняння Клейна-Гордона у вигляді $g^{ab}p_a p_b\Psi(p) = \kappa^2\Psi(p)$, де κ – фіксований параметр. Воно є найпростішим рівнянням, інваріантним відносно неоднорідної групи де Сіттера $ISO(1,4)$, що генерується п'ятнадцятьма операторами P_a, L_{ab}; L_{ab} – генератори алгебри $so(1,4)$, а P_a – генератори трансляцій у просторі $M_p^{(1,4)}$, комутаційні співвідношення яких між собою і з L_{ab} мають вигляд: $[P_a, P_b] = 0$, $[P_a, L_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b$.

Згідно інтерпретації робіт [18, 19], хвильова функція $\Psi(p)$ описує вільну систему (типу нестабільної частинки) з нульовими спіном і ізоспіном, але змінної маси $m = \sqrt{\kappa^2 + p_4^2}$. Очевидно, що вона може бути представлена у вигляді $\Psi(p) = \delta(p^2 - \kappa^2)\varphi(p)$. Множник $\delta(p^2 - \kappa^2)$ установлює зв'язок між «енергетичною» змінною $p_0 > 0$, імпульсною змінною $\mathbf{p}$ і масовим членом $m^2 = p_4^2 + \kappa^2 : p_0^2 - \mathbf{p}^2 - p_4^2 = \kappa^2$, κ^2 – це інваріант групи $ISO(1,4)$. У подальшому припустимо, що 5-вектори p задовольняють це співвідношення. Далі для простоти покладемо $\kappa = 1$, вважатимемо, що $\varphi(p)$ задана на верхній порожнині гіперболоїда $p_0^2 - \tilde{p}^2 = 1$, $p_0 > 0$, $\tilde{p} = (\mathbf{p}, p_4)$. Він реалізує дійсний 4-вимірний простір Лобачевського $L_p^{(4)}$. Сукупність «додатно-частотних» розв'язків рівняння $(g^{ab} p_a p_b - 1)\varphi(p) = 0$, $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$, тобто розв'язків з $p_0 = \omega(\mathbf{p}, p_4) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + p_4^2 + 1} > 0$ утворює лінійний векторний простір, який може бути перетворений в гільбертів простір $L^2(L_p^{(4)})$, якщо визначити в ньому скалярний добуток у вигляді $(\varphi_1, \varphi_2) = \int (d^4 p / p_0)\overline{\varphi_1(p)}\varphi_2(p)$.

У просторі $L^2(L_p^{(4)})$ реалізується незвідне унітарне відносно цього скалярного добутку представлення групи $ISO(1,4)$. Відносно перетворень Λ з підгрупи $SO(1,4)$ функція $\varphi(p)$ перетворюється по квазирегулярному представленню $\varphi'(p) = \pi(\Lambda)\varphi(p) = \varphi(\Lambda^{-1}p)$, яке, взагалі кажучи, є звідним. Задача розкладу його на незвідні представлення еквівалентна розкладу $\varphi(p)$ по базисних функціях у просторі $L^2(L_p^{(4)})$. Такі розклади приводять до інваріантної класифікації станів змінної маси по власних значеннях операторів Казиміра групи $SO(1,4)$. Вирішенням такої задачі виясняється, які із унітарних незвідних представлень однорідної групи $SO(1,4)$ породжуються унітарним незвідним представленням групи $ISO(1,4)$.

Випишемо тут формули розкладу $\varphi(p)$ по системі $SO(1,4)$ – КС, увівши позначення $\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = [p,\hat{k}]^{-3/2+ir} = [p,(1,\tilde{\zeta})]^{-3/2+ir} = (\sqrt{1+\tilde{p}^2} - \tilde{p}\tilde{\zeta})^{-3/2+ir}$, $\hat{k} = (1,\tilde{\zeta}), [\hat{k},\hat{k}] = 0$, $\tilde{\zeta}^2 = 1$; $\tilde{r} \equiv (r, \tilde{\zeta})$. Використаємо (29) і (30). У даних перепозначеннях ці формули представлені у вигляді

$$\varphi(\tilde{p}) = (2\pi)^{-2}\int d\mu(\tilde{r})\Xi(\tilde{p};\tilde{r})\Psi(\tilde{r}), \tag{35}$$

$$\Psi(\tilde{r}) = (2\pi)^{-2}\int d\mu(\tilde{p})\overline{\Xi(\tilde{p};\tilde{r})}\varphi(\tilde{p}), \tag{36}$$

де $\varphi(\tilde{p}) \equiv \varphi(p_0 = \sqrt{1+\tilde{p}^2}, \tilde{p})$, $\Psi(\tilde{r}) \equiv \hat{f}(\tilde{\zeta}; r)$, $d\mu(\tilde{r}) = d\mu(r)d\mu(\tilde{\zeta})$, $d\mu(\tilde{p}) = d\tilde{p}/\sqrt{1+\tilde{p}^2}$. При дії на $[p, \hat{k}]^\sigma$ операторів $J_{ab} = -i(p_a\partial_b - p_b\partial_a)$, одержуємо $J_{ab}[p, \hat{k}]^\sigma = -i\sigma(p_a\hat{k}_b - p_b\hat{k}_a)[p, \hat{k}]^{\sigma-1}$, де $\partial_a \equiv \partial/\partial p_a$, $\sigma = -3/2 + ir$. Тоді знайдемо $J^{ab}J_{ab}[p,\hat{k}]^\sigma = -2\sigma(\sigma+3)[p,\hat{k}]^\sigma$. Це означає, що розглядувана функція $\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = [(\tilde{p}/\sqrt{1+\tilde{p}^2}, (1,\tilde{\zeta}))]^\sigma$ є власною функцією оператора Казиміра групи $SO(1,4)$ $V = -1/2\ J^{ab}J_{ab}$ із власним значенням $\nu(V) = -\sigma(\sigma+3)$.У декартовому базисі

$$V = -\Delta_L(L_{\tilde{p}}^{(4)}) = -[\bar{g}(L_{\tilde{p}}^{(4)})]^{-1/2}\partial_\mu g^{\mu\nu}(L_{\tilde{p}}^{(4)})[\bar{g}(L_{\tilde{p}}^{(4)})]^{1/2}\partial_\nu, \quad \mu,\nu = 0, 1, 2, 3, \tag{37}$$

де $g^{\mu\nu}(L_p^{(4)})$ – метричний тензор простору $L_p^{(4)}$, $\bar{g}(L_p^{(4)}) = |\det g^{\mu\nu}(L_p^{(4)})|$.

Зауважимо, що метричний тензор $g_{\mu\nu}(L_p^{(4)})$ на $L_p^{(4)}$, як гіперповерхні гіперболоїда $H_+^{(4)}$, зануреної у плоский імпульсний простір Мінковського $M_p^{(1,4)}$, індукується метричним тензором $g^{ab}(M_p^{(1,4)})$ за формулою $g_{\mu\nu}(L_p^{(4)}) = g^{ab}(M_p^{(1,4)})\partial_\mu p_a(\omega)\partial_\nu p_b(\omega)$, де через ω позначена сукупність внутрішніх координат на $L_p^{(4)}$. Метрика простору $L_p^{(4)}$ визначається рівністю

$$ds^2 = d\tilde{p}^2 - (\tilde{p}d\tilde{p})/(1+\tilde{p}^2), \quad \tilde{p}d\tilde{p} = \mathbf{p}d\mathbf{p} + p_4dp_4, \quad \tilde{p}^2 = \mathbf{p}^2 + p_4^2. \tag{38}$$

Отже, орисферичні хвилі $\Xi(\tilde{p};\tilde{r})$ задовольняють рівняння

$$[(1/\sqrt{\tilde{g}})\partial_\mu g^{\mu\nu}(\tilde{p})\sqrt{\tilde{g}}\,\partial_\nu]\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = \sigma(\sigma+3)\Xi(\tilde{p};\tilde{r}),\ \ \sigma = -3/2 + ir. \qquad (39)$$

Перетворення (35) – (36) у p̃-просторі Лобачевського Lp̃(4) з метрикою (38) грає роль перетворення Фур'є. Ця аналогія стає ще більш схожою, якщо врахувати (див. [12]), що відстань τ (p, k̂) від точки p до орисфери [p, k̂] = 1, визначається формулою τ (p, k̂) ~ ln[p,k̂] і тоді $\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) \sim e^{(-3/2+ir)\tau(\tilde{p};\tilde{\zeta})}$. Тут уведено позначення $\tau(p,\hat{k}) = \tau[(\sqrt{1+\tilde{p}^2},\tilde{p}),(1,\tilde{\xi})] \equiv \tau(\tilde{p},\tilde{\zeta})$.

Функції Ξ(p̃; r̃) грають роль плоских (орисферичних) хвиль у p̃-просторі Лобачевського Lp̃(4), що відповідають «трансляціям»

$$\tilde{p}' = (\Lambda^{\sim}_{\tilde{q}}\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(+)\tilde{q} = \tilde{p} + \tilde{q}\left(p_0 - \frac{\tilde{p}\tilde{q}}{q_0+1}\right) = \tilde{p}(+)\tilde{q}\left(\sqrt{1+\tilde{p}^2} + \frac{\tilde{p}\tilde{q}}{1+\sqrt{1+\hat{q}^2}}\right) \qquad (40)$$

у цьому просторі, які визначаються власне перетвореннями де Сіттера $\tilde{\Lambda q}$. У границі, коли

| p̃ | << 1, | p̃ |r = фікс. , (41)

перетворення (40) переходять у перетворення трансляцій евклідового p̃-простору Rp̃(4): p̃ → p̃ + q̃, а Ξ(p̃; r̃) → exp(ip̃r̃), де r̃ = rζ̃ , ζ̃ 2 = 1, r̃ 2 = r 2. Ці перетворення простору Rp̃(4) утворюють групу, на відміну від перетворень (40), які є просто елементами групи SO(1,4). Ясно, що відносно SO(1,4) – перетворень dμ(p̃) не змінюється.

Таким чином, на формули (35) – (36) можна дивитися, як на співвідношення, що зв'язують кривий p̃-простір з деяким 4-вимірним конфігураційним r̃-простором. Модуль | r̃ | = r вектора r̃ є SO(1,4) – інваріантом, а його напрям перетворюється відносно SO(1,4), як чотиривимірна частина ізотропного 5-вектора k̂ = (1, ζ̃), [k̂, k̂] = 0. Проведемо далі цю аналогію. Очевидно, що «Фур'є» – перетворення (35) – (36) задають відображення p̃ ↔ r̃.

Відомо, що плоскі хвилі ξ(p̃; r̃) = exp (± ir̃p̃), які здійснюють перехід від евклідового p̃-простору Rp̃(4) до евклідового r̃-простору Rr̃(4), є матричними елементами унітарного представлення групи трансляцій простору Rp̃(4) з оператором Казиміра X̂ 2 = (i∂ / ∂ p̃)2 =r̃ 2 =r 2, які відповідають значенням r2 > 0. Цей інваріант співпадає з оператором квадрата 4-інтервала X̃ 2= X 2 + X42 = r̃ 2. Так, що плоскі хвилі ξ(p̃; r̃) можна розглядати, як розв'язки наступного диференціального рівняння

$$(i\partial/\partial\tilde{p})^2\xi(\tilde{p};\tilde{r}) = \tilde{r}^2\xi(\tilde{p};\tilde{r}). \qquad (42)$$

Для унітарних представлень класу 1 групи SO(1,4) інваріантом є, як ми знаємо, оператор (37) із власним значенням νr (V) = r2 + 9/4. У границі (41)

$$V = -\bar{g}^{-1/2}(\partial/\partial p_\mu)g^{\mu\nu}(\tilde{p})\bar{g}^{1/2}(\partial/\partial p_\nu) \to -(\partial/\partial\tilde{p})^2 = (i\partial/\partial\tilde{p})^2 = \hat{X}^2.$$

У цій границі рівняння (39) для орисферичних хвиль Ξ(p̃; r̃) переходять у рівняння (42) для плоских хвиль ξ(p̃; r̃). Таким чином, оператор V ми можемо інтерпретувати як узагальнення «нерелятивістського» оператора квадрата 4-інтервалу X̂ 2, а функцію Ξ(p̃; r̃) – як «плоску» хвилю, яка здійснює перехід від p̃-представлення до r̃-представлення.

Зауважимо, що хоча ξ(p̃; r̃) є власними функціями оператора трансляцій $\hat{X} = i\partial/\partial\tilde{p}$ у просторі Rp̃(4), «плоскі» хвилі Ξ(p̃; r̃) не можна розглядати як власні функції вектор-генератора перетворень (40) $\hat{X}(L^{(4)}_{\tilde{p}}) = i\sqrt{1+\tilde{p}^2}\,\partial/\partial\tilde{p}$, оскільки його чотири компоненти не комутують між собою, а отже, їх не можна привести до діагонального вигляду одночасно.

Для «плоских» хвиль можна записати розклад (див. (23)):

$$\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = \frac{1}{|\tilde{p}|}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}(j+1)\frac{\Gamma(-1/2+ir)}{\Gamma(-1/2+ir-j)}P_{-1/2+ir}^{-j-1}(\mathrm{ch}\lambda)\frac{\sin j(\varphi+1)}{\sin\varphi}, \tag{43}$$

де p0 = ch λ, p̂ = (sh λ) η̃, η̃ 2 = 1, cos φ = (p̃ r̃)/| p̃ || r̃ |. Якщо p = Λ p̂, p̂ = (1,0̃), Λ ∈ SO(1,4), то величини $t^{r}_{K0}(\Lambda 04(\lambda)) \equiv \mathrm{tjr}(\lambda) = \mathrm{Rjr}(\lambda)$ є матричними елементами «буста» нульового стовпчика унітарних представлень класу 1 групи SO(1,4). Співвідношення (43) дає можливість розглядувати «плоску» хвилю Ξ(p̃; r̃) як генеруючу функцію для цих матричних елементів.

Як когерентні стани «плоскі» хвилі по змінній r̃ = (r,ζ̃) задовольняють рівняння(див. (34))

$$\hat{H}\,\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = 2\,\mathrm{ch}\lambda\;\Xi(\tilde{p};\tilde{r}), \tag{44}$$

де Ĥ – диференціально-різницевий оператор

$$\hat{H} = 2\mathrm{ch}\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{3i}{r}\mathrm{sh}\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\Delta_{\tilde{\zeta}}}{ir(ir-1/2)}e^{i\partial/\partial r}, \tag{45}$$

де Δζ̃ – оператор Лапласа на одиничній сфері S(3): ζ̃ 2 = 1. У границі (41) рівняння (44) набуває форму аналога рівняння Шредінгера для вільної «частинки» одиничної маси:

$$H\,\xi(\tilde{p};\tilde{r}) = E\,\xi(\tilde{p};\tilde{r}),\;\; E = \tilde{p}^{2}/2,$$

$$H = [\hat{P}(R^{(4)}_{\tilde{r}})]^{2} = \left(-i\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\right)^{2} = -\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}r^{2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^{2}}\Delta_{\tilde{\zeta}}.$$

Геометрія конфігураційного r̃-простору, як це видно із (35) – (36), неевклідова. Інваріантна міра dμ (r̃) = dμ(r)dμ(ζ̃) = r (r2 + 1/4)th πrdrdμ(ζ̃) стає евклідовою тільки у границі (41): $d\mu(\tilde{r}) \to d\tilde{r} = r^{3}drd\mu(\tilde{\zeta})$. У цій границі і $d\mu(\tilde{p}) = d\tilde{p}/\sqrt{1+\tilde{p}^{2}}$ стає евклідовою: dμ (p) ⟶ dp̃ ≡ dp1dp2dp3dp4. Генератори зсувів r̃-простору не можуть бути компонентами вектор-оператора $\hat{\tilde{p}} = (-i\partial/\partial\tilde{r})$, бо спектр останніх дає евклідовий p̃-простір Rp̃(4), а не кривий p̃-простір Lp̃(4), і (що дуже важливо) спільною власною функцією операторів P̂α , α = 1, 2, 3, 4, є плоска хвиля ξ(p̃; r̃), а не орисферична Ξ(p̃; r̃). Всі необхідні вимоги задовольняють диференціально-різницеві оператори такого вигляду:

$$\overline{P}_{1} = -\sin\delta\sin\theta\cos\varphi\left(e^{i\frac{\partial}{\partial r}}-\frac{\hat{H}}{2}\right)-\frac{i}{r}\left(\cos\delta\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\delta}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{\sin\delta\sin\theta}\right)e^{i\frac{\partial}{\partial r}},$$

$$\overline{P}_{2} = -\sin\delta\sin\theta\sin\varphi\left(e^{i\frac{\partial}{\partial r}}-\frac{\hat{H}}{2}\right)-\frac{i}{r}\left(\cos\delta\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\delta}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin\delta\sin\theta}\right)e^{i\frac{\partial}{\partial r}},$$

$$\overline{P}_{3} = -\sin\delta\cos\theta\left(e^{i\frac{\partial}{\partial r}}-\frac{\hat{H}}{2}\right)-\frac{i}{r}\left(\cos\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\delta}-\frac{\sin\theta}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)e^{i\frac{\partial}{\partial r}},$$

$$\overline{P}_{4} = -\cos\delta\left(e^{i\frac{\partial}{\partial r}}-\frac{\hat{H}}{2}\right)+\frac{i}{r}\sin\delta\;\frac{\partial}{\partial\delta}\;e^{i\frac{\partial}{\partial r}},$$

де Ĥ визначається формулою (45), а δ, θ, φ – сферичні кути вектора ζ̃ (див. (3)). Справедливі співвідношення [P̄α, P̄β] = 0, α, β = 1, 2, 3, 4,

$$\hat{\tilde{P}}\,\Xi(\tilde{p};\tilde{r}) = \tilde{p}\,\Xi(\tilde{p};\tilde{r}), \tag{46}$$

де $\hat{\overline{P}} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4)$. У границі (41) оператори $\overline{P}\alpha$ (α = 1, 2, 3, 4) переходять у генератори зсувів евклідового 4-простору $R\tilde{r}$ (4), записаних у сферичних координатах:

$$\overline{P}_1 \to \overline{p}_1 = -i\left(\sin\delta\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\delta\sin\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\delta} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\delta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\overline{P}_2 \to \overline{p}_2 = -i\left(\sin\delta\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\delta\sin\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\delta} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\delta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\overline{P}_3 \to \overline{p}_3 = -i\left(\sin\delta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\delta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\delta} - \frac{\sin\theta}{r\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

$$\overline{P}_4 \to \overline{p}_4 = -i\left(\cos\delta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\delta}{r}\frac{\partial}{\partial\delta}\right).$$

При цьому виконується така рівність: $\hat{\tilde{p}}\xi(\tilde{p};\tilde{r}) = \tilde{p}\,\xi(\tilde{p};\tilde{r})$, де $\hat{\tilde{p}} = -i\partial/\partial\tilde{r}$, $\tilde{r} = r\tilde{\zeta}$. Її можна розглядувати як граничний випадок (у сенсі (41)) рівності (46).

На завершення приведемо рівняння

$$(\hat{H}_0 - 2E_0)\Psi_j^{(0)}(r) = 0\,, \tag{47}$$

$$\hat{H}_0 \equiv 2\mathrm{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{3i}{r}\mathrm{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{j(j+2)}{ir(-ir+1/2)}e^{id/dr}.$$

Розв'язком його є функція Ψj(0)(r) = Rjr(ch λ). У термінах Δ – операції (Δ = i exp(id/dr – 1) рівняння (47) є рівнянням другого порядку, отже має два лінійно незалежних розв'язки. При заміні j → – j – 2 воно, очевидно, не змінюється. А тому неважко перевірити, що іншим його розв'язком є функція $R^r_{-j-2}(\mathrm{ch}\lambda)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. И.И. Качурик. Об аналоге преобразования Шапиро в пятимерном подходе: Препр. / АН Украины. Ин-т теорет. физики; ИТФ-76-98Р. – К.: 1976. – 23с.
2. А.М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. – М.: Наука, 1987. – 270с.
3. И.А. Малкин, В.И. Манько. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. – М.: Наука, 1979. – 320с.
4. А.У. Климык, И.И. Качурик. Вычислительные методы в теории представлений групп. – К.: Вища школа, 1986. – 224с.
5. J. Dixmier. Representations integrables du groupe de Sitter // Bull. Soc. math. France. – 1963. – V.89. – P.9 – 41.
6. R. Takahashi. Sur les representations unitaires des groupes de Lorentz generalises // Bull. Soc. math. France. – 1963. – V.91. – P.289 – 433.
7. A. Kihlberg, S. Strom. On the unitary irreducible representations of the (1+4) de Sitter group // Arkiv for Fysik. – 1967. – V.31, N6. – P.491 – 508.
8. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588с.
9. A.M. Perelomov. Coherent states for general Lee group // Commun. Math. Phys. – 1972. – V.26. – P.222 – 237.
10. Я.А. Смородинский, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Групповые и вероятностные основы квантовой теории. // Успехи физ. наук. – 1992. – Т.162, №12. – С. 1 – 95.

11. А.М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения // Успехи физ. наук. – 1977. – Т.123, №1. – С. 23 – 55.
12. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. – 656с.
13. И.И. Качурик. Инвариантные разложения решения (1+4)-мерного уравнения типа Клейна-Гордона в некоторых ортогональных системах координат импульсного пространства де Ситтера: Препр. / АН Украины. Ин-т теорет. физики; ИТФ-76-97Р. – К.: 1976. – 42с.
14. И.И. Качурик. Инвариантное разложение решения пятимерного уравнения Клейна-Гордона в одной ортогональной системе координат // Укр. физ. журн. – 1976. – Т.21, №11. – С. 1853 – 1862.
15. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамович, И. Стиган.: Пер. с англ. – М. Наука, 1979. – 830с.
16. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1964. – Т.46, №5. – С. 1793 – 1808.
17. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // Физика элементар. частиц и атом ядра. – 1972. – Т.8, №3. – С. 635 – 690.
18. V.I. Fushchich, I.Yu.Krivsky. On a possible approach to the variable-mass problem // Nucl. Phys. – 1968. – B7. – P.79 – 82.
19. V.I. Fushchich, I.Yu.Krivsky. On representations of the ingomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkovski spase // Nucl. Phys. – 1969. – B14. – P.573 – 585.

I. Kachuryk[1], I. Hula[2]
[1] Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, str. Kyivska, 24, 41400, Hlukhiv
e-mail: hulaih@khmnu.edu.ua
[2] Khmelnitsky National University, str. Instytutska, 11, 29016, Khmelnytsky

COHERENT STATES OF A HOMOGENEOUS DE SITTER GROUP

The theory of coherent states (CS) of the de Sitter group SO(1, 4) is further developed. In particular, a simple method of their construction is proposed, a differential-difference equation for them is derived, formulas for generalized partial wave decompositions are given. It is shown that these CS's can be considered as "plane waves" in 4-dimensional Lobachevsky space (they are parameterized by points of this space). Wave functions of variable mass particles in momentum Cartesian coordinates of this space are expanded in this system of "waves". We obtain in explicit form the generators of translation in the introduced by us configuration space which is canonically conjugated to the momentum Lobachevsky space $L_p^{(4)}$. It is revealed that their common spectrum coincides with the curved space $L_p^{(4)}$, and their common eigenfunction is the "plane wave".
Keywords: coherent states, group, representation, Lobachevsky space, horospheric waves.

Ю. Яремко
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького, 1, 79011, Львів
e-mail: yar@icmp.lviv.ua

РАДІАЦІЙНЕ ГАЛЬМУВАННЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ В ПРОСТОРІ ДЕ СІТТЕРА

У статті розглядається рух точкового електричного заряду в просторі-часі де Сіттера. Точкова частинка з масою m і зарядом q, що рухається по геодезичній, створює електромагнітне поле, що при наближенні до заряду необмежено зростає. Поле виводиться з електромагнітної функції Гріна, отриманій Хігучі та Лі [1]. Ефективне рівняння руху виводиться з рівнянь балансу, що є диференційними наслідками законів збереження, що відповідають групі ізометрії простору де Сіттера. Процедура перенормування розбіжностей основана на концепції Детвейлера-Уайтинга, згідно з якою рух заряду визначається лише регулярною складовою законів збереження, а розбіжні члени поглинаються індивідуальними характеристиками частинки.
Ключові слова: простір де Сіттера, рівняння Максвелла, закони збереження, перенормування, реакція випромінювання.

1. Вступ

Останніми роками стрімко зростає інтерес до задач про реакцію електромагнітного випромінювання та силу гравітаційної самодії на точкову частинку, що рухається в викривленому просторі-часі. Це було пов’язано з розвитком астрономії гравітаційних хвиль [2] і необхідністю створювати точні гравітаційні хвилі [3] для майбутнього космічного гравітаційного інтерферометра LISA; стрімким розвитком лазерної технології, який потребує правильного опису руху ультрарелятивістського електрона в інтенсивних електромагнітних полях [4– 8]; зростаючим інтересом до теорії випромінювання в просторово-часових вимірах, відмінних від чотирьох [9,10]. Доданки, що описують реакцію випромінювання домінують у динаміці частинок високої енергії, що рухаються в надзвичайно сильних електромагнітних полях. Така ситуація має місце в астрофізиці, зокрема в релятивістських джетах, що генеруються центрами активних галактик, та в магнетосфері пульсарів.

Ранні дослідження електромагнітної власної сили пов'язані з іменами Лоренца, Лармора та Абрахама. Лоренц [11] отримав вираз для сили самодії, розглядаючи електрон як невелику заряджену сферу скінченних розмірів. Абрахам [12] узагальнив вираз самодії на релятивістський діапазон. Розклавши електромагнітне поле частинки на сингулярні та регулярні частини, скомпоновані з випередного та спізненого потенціалів Лінарда-Віхерта, Дірак [13] вивів рівняння руху точкової зарядженої частинки в плоскому просторі-часі. Це добре відоме рівняння Лоренца-Абрагама-Дірака (LAD), яке описує динаміку точкового заряду, що діє на зовнішню силу, а також його власне електромагнітне поле F:

$$a^{\mu} = \frac{q}{m} F^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu} + \tau_0 \left(\dot{a}^{\mu} - (a \cdot a) u^{\mu} \right). \tag{1.1}$$

Тут $u^\mu(s) = dz^\mu(s)/ds$, $(\mu = 0,1,2,3)$, – 4-швидкість частинки, що знаходиться в точці з координатами z(s) на світовій лінії, параметризованій власним часом s, $a^\mu(s) = du^\mu(s)/ds$, – 4-прискорення; його похідну за часом $\dot{a}^\mu(s) = da^\mu(s)/ds$ в літературі часто називають "джерком". Сила самодії пропорційна малому параметру $\tau_0 = 2q/(3m)$ $(6.2664 \cdot 10^{-24}\ s$ для електрона).

В 1960 ДеВітт та Бреме [14] узагальнили це рівняння на випадок простору з нетривіальною метрикою. У 1968 це рівняння було підправлене Гоббсом [15] і набуло остаточного вигляду:

$$ma^\mu = f^\mu_{ext} + q^2\left(\delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu\right) + \left(\frac{2}{3}\frac{Da^\nu}{ds} + \frac{1}{3}R^\nu_\lambda u^\lambda\right) + f^\mu_{tail}. \tag{1.2}$$

Коваріантне прискорення $a^\mu(s) = Du^\mu(s)/ds$ є коваріантна похідна 4-швидкості $u^\mu(s)$ вздовж світової лінії заряду q; R^μ_ν – тензор Річчі. Зовнішня сила $f^\mu_{ext} = g^{\mu\alpha}\left(qF_{\alpha\beta}u^\beta\right)$ є коваріантним узагальненням сили Лоренца. Вираз у правій частині рівняння (1.2), тобто сила самодії, є рівнодійною двох типів взаємодії частинки з її власним електромагнітним полем. Перший є суто локальним і описує реакцію випромінювання в даний момент часу. Другий – нелокальний, спричинений випромінюванням генерованим в усі попередні моменти часу:

$$f^{tail}_\mu = q^2 u^\nu(s)\int_{-\infty}^{s} d\tau \nabla_{[\mu} G^{ret}_{\nu]\lambda}\left(z(s), z(\tau)\right) u^\lambda(\tau) \tag{1.3}$$

Тут $G^{ret}_{\nu\lambda}\left(z(s), z(\tau)\right)$ – електромагнітна спізнена функція Ґріна у викривленому просторі-часі [16], а ∇_μ – коваріантна похідна в μ-му напрямку. Квадратними дужками позначена антисиметризація індексів. Цей тип взаємодії є відображає порушення принципу Гюйгенса у викривленому просторі-часі: тут електромагнітні хвилі поширюються не тільки зі швидкістю світла, але й з будь-якою швидкістю, меншою або рівною швидкості світла. З цієї причини масивна частинка "відчуває" власне поле, яке діє на неї так само, як і зовнішнє.

Розвиваючи ідеї основоположної статті Дірака [13], Детвайлер і Вайтінг [17] запропонували схему регуляризації, основану на розбитті спізненої функції Гріна у викривленому просторі-часі на розбіжну та регулярну частини, що є розв'язками неоднорідного та однорідного рівнянь Максвелла відповідно. На відміну від регулярної частини, розбіжна функція Гріна означена лише на поверхні світлового конуса і не залежить від того, що було з частинкою в минулому. Регулярна функція Гріна має фізично обгрунтовану причинно-наслідкову структуру, в якій немає місця випередному світловому конусу. Функція генерує випромінювання, яке покидає заряджену частинку та розсіюється у просторі. На противагу цьому сингулярна частина електромагнітного поля "прикріплена" до заряду і переноситься разом з ним. Вона "абсорбується" індивідуальними характеристиками частинки в рамках процедури регуляризації.

Використовуючи цю декомпозицію, Гарте [18,19] дослідив динаміку протяжних заряджених тіл, які взаємодіють як із зовнішніми, так і з власними електромагнітними полями. Тіло рухається в довільно викривленому просторі-часі з довільною метрикою. Схема Гарта заснована на концепції наближених просторово-часових симетрій. У досить малій околиці точки на світовій лінії частинки вводиться супутня система відліку, де метрика є майже плоскою. В цій області інтеграл дії є інваріантним відносно перетворень з узагальненої групи Пуанкаре [18]. У процесі регуляризації розраховуються об'ємні інтеграли згортки тензора енергії напруги та узагальнених полів Кіллінга [19].

У цій статті ми досліджуємо проблему самодії зарядженої частинки, що рухається по довільній траєкторії в просторі-часі де Сіттера. Ми хочемо встановити, як гравітація та електромагнітна потенціальна енергія заряду змінюють інерційні властивості зарядженої частинки, тобто її 4-імпульс та її масу. У загальній теорії відносності простір де Сіттера є спеціальним вакуумним розв'язком рівнянь Айнштайна з максимальною симетрією. Група його ізометрій є десятипараметрична ортогональна група *SO(4,1)*, яка для кінематики коротких відстаней зводиться до групи Пуанкаре. Вибір цього злегка викривленого простору-часу як основного наближення фонової гравітації в схемі Гарта видається більш адекватним, ніж плоский простір Мінковського.

2. Простір де Сіттера

Простір де Сіттера dS_4 є вакуумним розв'язком рівнянь Айнштайна з космологічною сталою $\Lambda=3H^2$. Стала Хаббла H визначає скаляр Річчі $R=12H^2=4\Lambda$. Ми визначаємо простір де Сіттера як підмноговид плоского простору-часу M_5 з одним додатковим виміром, параметризованим прямокутними координатами Мінковського *y*:

$$\eta_{MN} y^M y^N = \frac{1}{H^2}. \tag{2.1}$$

Метричний тензор $\eta_{MN} = diag(-1,1,1,1,1)$. Індекси, позначені великими латинськими літерами, приймають значення в інтервалі від 0 до 4. Ми дотримуємося гіпотези CPT-симетричного Всесвіту: верхня половина гіперболоїда (2.1) відображає наш Всесвіт, тоді як нижня його половина описує анти-Всесвіт – космос з античастинками та протилежним напрямком стрілки часу [20].

Метрика простору-часу де Сіттера dS_4 задається проекцією п'ятивимірного прямого елемента $ds^2 = \eta_{MN} dy^M dy^N$ на поверхню гіперболоїда (2.1). Щоб параметризувати dS_4 будемо використовувати конформні координати Айнштайна [21, §2.21.2]. У CPT-симетричному Всесвіті стрілка часу вказує від Великого Вибуху в обох напрямках. Щоб адекватно описати цю обставину, ми змінюємо еволюційну змінну $\eta=\tau+\pi/2$. Метрика де Сіттера набуває вигляду

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \cos^2 \tau}\left(-d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2\right),$$

де $d\omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2$ – елемент поверхні одиничної сфери. В термінах змінних Айнштайна координати точок на гіперболоїді де Сіттера є такими:

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{H} tg\tau, \\ y^1 &= \frac{1}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau}\sin\vartheta\cos\phi, \\ y^2 &= \frac{1}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau}\sin\vartheta\sin\phi, \\ y^3 &= \frac{1}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau}\cos\vartheta, \\ y^4 &= \frac{1}{H}\frac{\cos\chi}{\cos\tau}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де кутові координати змінюються в діапазоні $\tau \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\chi \in [-\pi, \pi]$, полярний кут $\vartheta \in [0, \pi]$, та азимутальний кут $\phi \in [0, 2\pi)$. Однолистний гіперболоїд (2.1) візуалізується як круговий циліндр висотою π і одиничним радіусом $C \in \{(\chi, \tau) \in R\chi \in [-\pi, \pi], |\tau \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Нескінченно віддалене майбутнє I_+ та минуле $I\_$ ототожнюються з ребрами $\tau = \pi/2$ і $\tau = -\pi/2$, відповідно. Вертикальні краї смуги, $V_{--} = \{\tau \in (-\pi/2, \pi/2), \chi = -\pi\}$ і $V_+ = \{\tau \in (-\pi/2, \pi/2), \chi = +\pi\}$, склеєні. Кожній точці цієї циліндричної поверхні відповідає двовимірна сфера з радіусом $R = \sin\chi / H\cos\tau$. Точки на ній параметризовані полярним иа азимутальним кутами. Якщо $\chi=0$ і $\chi=\pm\pi$ радіус дорівнює нулю. Сфери стискаються до точок, які називаються "Північний полюс" і "Південний полюс", відповідно[1].

Оскільки простір де Сіттера є злегка деформованим простором Мінковського, доцільно використовувати *стереографічні координати,* які проектують гіперповерхню де Сіттера на простір Мінковського [22.23]:

$$y^\alpha = \Omega(x) x^\alpha, \tag{2.4}$$

$$y^4 = \pm\frac{1}{H}\Omega(x)\left(1 - \frac{H^2}{4}x^2\right), \tag{2.5}$$

де $x^2 = (x \cdot x)$.та конформний множник:

$$\Omega(x) = \left[1 + \frac{H^2}{4}x^2\right]. \tag{2.6}$$

Індекси, позначені малими грецьким літерами, набувають значень від 0 до 3. "Точка" позначає скалярний добуток у плоскому просторі-часі чотирьох вимірів: $(x \cdot x) = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$. Четверта координата (2.5) може бути представлена як $y^4 = \pm 1/H\left(2\Omega(x) - 1\right)$.

Метрику де Сіттера можна отримати, спроектувавши плоску метрику п'ятивимірного простору Мінковського на dS_4. Підставивши вирази (2.4) у плоску метрику $ds^2 = \eta_{MN} dy^M dy^N$, ми проектуємо її на поверхню гіперболоїда (2.1):

$$ds^2 = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.7}$$

Квадрат функції (2.6) є конформним множником метрики де Сіттера $g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}$, де $\eta_{\alpha\beta} = diag(-1,1,1,1)$.

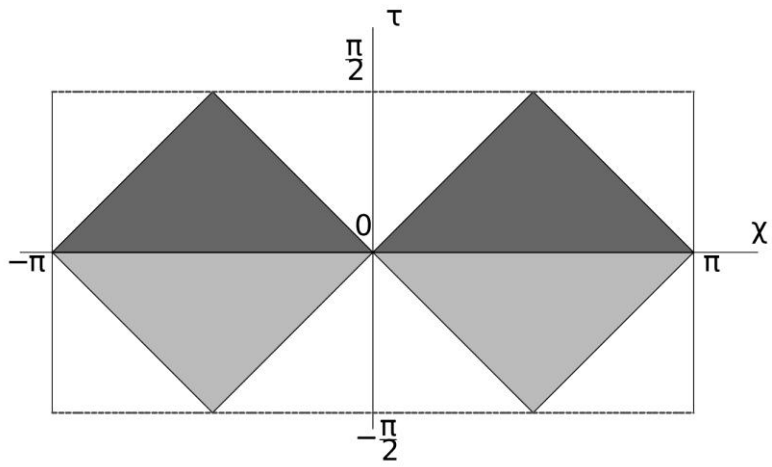


Рис.1. Компактифікований простір де Сіттера. Координати (χ,τ) покривають однолистовий гіперболоїд (2.1). Нижній край $\tau = -\pi/2$ відповідає нескінченному минулому I_-, тоді як верхній $\tau = +\pi/2$ представляє нескінченне майбутнє I_+. Рівень $\tau = 0$ відображає Великий вибух $\chi = 0$ і Великий відскок $\chi = \pm\pi$.

Запишемо співвідношення, що пов'язують стереографічні координати з конформними координатами Айнштайна (2.3). Щоб покрити однолистковий гіперболоїд (2.1) потрібно дві карти:

(a) Всесвіт: $\chi \in [-\pi/2, \pi/2], y^4 = +(2\Omega(x) - 1)/H$.

Тут конформний множник є таким

$$\Omega(x) = \frac{\cos\tau + \cos\chi}{\cos\tau}, \tag{2.9}$$

а координати:

$$x^0 = \frac{2}{H}\frac{\sin\tau}{\cos\tau + \cos\chi},\ x^1 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau + \cos\chi}\sin\vartheta\cos\phi,\ x^2 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau + \cos\chi}\sin\vartheta\sin\phi,$$

$$x^3 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau + \cos\chi}\cos\vartheta.$$

Значення $\tau=0$ та $\chi=0$ позначають точку сингулярності (Великий Вибух).

(b) Анти-Всесвіт: $\chi \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi], y^4 = -(2\Omega(x) - 1)/H$.

Тут конформний множник набуває вигляду:

$$\Omega(x) = \frac{\cos\tau - \cos\chi}{\cos\tau}, \tag{2.10}$$

координати

$$x^0 = \frac{2}{H}\frac{\sin\tau}{\cos\tau-\cos\chi},\ x^1 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau-\cos\chi}\sin\vartheta\cos\phi,\ x^2 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau-\cos\chi}\sin\vartheta\sin\phi,$$

$$x^3 = \frac{2}{H}\frac{\sin\chi}{\cos\tau-\cos\chi}\cos\vartheta.$$

Значення $\tau=0$ та $\chi=\pm\pi$ позначають точку сингулярності (Великий Відскок).
На рисунку зображена діаграма Пенроуза.

Скориставшись метричним тензором $g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}$, порахуємо символи Крістоффеля:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{H^2}{2}\Omega^2(x)\left(-\delta^{\mu}_{\alpha}x_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}x_{\alpha} + \eta_{\alpha\beta}x^{\mu}\right), \tag{2.11}$$

тензор Рімана:

$$R_{\nu\alpha\rho\beta} = -H^2\Omega^4(x)\left(\eta_{\alpha\rho}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\nu\rho}\right), \tag{2.12}$$

Тензор Річчі:

$$R_{\alpha\beta} = 3H^2\Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}, \tag{2.13}$$

та скаляр Річчі:

$$R = 12H^2. \tag{2.14}$$

Легко бачити, що ці тензори задовольняють вакуумні рівняння поля Айнштайна $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$, де тензор Айнштайна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu} = -3H^2\Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$, а космологічна константа $\Lambda = 3H^2$.

3. Електродинаміка у просторі де Сіттера

Нехай точковий заряд q рухається вздовж світової лінії $\zeta \subset U$, параметризованої чотирма функціями $z^{\alpha}(s)$ параметра власного часу s. Заряджена частинка створює струм:

$$j^{\nu}(x) = q\int_{-\infty}^{+\infty} ds u^{\nu}(s)\frac{\delta^{(4)}(x-z(s))}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{3.1}$$

де $u^{\nu}(s) = dz^{\nu}(s)/ds$ – чотири-швидкість. Тут враховано, що у викривленому просторі-часі в означенні δ – функції є визначник метричного тензора $\sqrt{-g(x)}$ [16, (13.2)]. У кожній точці чотиривимірного рімановового многовиду *(M,g)* струм (3.1) створює електромагнітне поле, яке задовольняє рівнянням Максвелла:

$$dF = 0, \quad \text{(a)} \qquad d^{*}F = 4\pi^{*}j. \quad \text{(b)} \tag{3.2}$$

На координатній карті *(U,x)* многовиду *M* поле задається 2-формою Фарадея $F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$, де диференціали dx^{μ}, $\mu=0,1,2,3$ утворюють базис 1-форм. Компоненти дуальної форми ${}^{*}F = \frac{1}{2}{}^{*}F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ залежать від метрики:

$$F_{\gamma\delta} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} g^{\beta\nu}, \tag{3.3}$$

де $\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu}$ – повністю антисиметричний тензор Леві-Чівіта. В координатному представленні друга пара рівнянь Максвелла (3.2b) набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} g^{\beta\nu}\right) = -4\pi\sqrt{-g}\, j^{\nu}. \tag{3.4}$$

Хоча тут використовуються звичайні частинні похідні, ці рівняння є коваріантними відносно довільних криволінійних перетворень координат: якщо замінити частинні похідні на коваріантні, додаткові члени, які з'являться внаслідок цього, скоротяться,

Розглянемо першу пару (3.2a) рівнянь Максвелла у викривленому просторі-часі. Ми припускаємо, що 2-форма Фарадея є точною на координатній карті $(\mathrm{U}, \mathrm{x}) \subset \mathrm{M}$: $F = dA$. Електромагнітне поле є коваріантним антисиметричним тензором другого рангу, який можна записати в термінах 1-форми потенціалу:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \nabla_{\alpha} A_{\beta} - \nabla_{\beta} A_{\alpha}, \tag{3.5}$$

де ∇_{α} – коваріантна похідна. Підставивши праву частину рівняння (3.5) в рівняння (3.4) та скориставшись калібруванням Лоренца $\nabla_{\alpha} A^{\alpha}$ отримаємо хвильове рівняння на компоненти електромагнітного потенціалу у викривленому просторі-часі:

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} A^{\alpha} - R^{\alpha}{}_{\beta} A^{\beta} = -4\pi j^{\alpha}, \tag{3.6}$$

де $R^{\alpha}{}_{\beta}$ – тензор Річчі.

Підставимо у загальний вираз (3.4) метричний тензор де Сіттера $\mathrm{g}_{\alpha\beta} = \Omega^{2}(x)\eta_{\alpha\beta}$ та обернений до нього $\mathrm{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2}(x)\eta^{\alpha\beta}$:

$$\eta^{\mu\alpha}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\left(A_{\beta}\eta^{\beta\nu}\right) - \eta^{\nu\beta}\frac{\partial}{x^{\beta}}\frac{\partial \eta^{\mu\alpha} A_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = -4\pi\Omega^{4}(x)\, j^{\nu}(x). \tag{3.7}$$

Вибравши калібрувальну умову $\partial(\eta^{\mu\alpha} A_{\alpha})/\partial x^{\mu} = 0$, отримаємо порівняно просте хвильове рівняння:

$$\eta^{\mu\alpha}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}\left(A_{\beta}\eta^{\beta\nu}\right) = -4\pi\Omega^{4}(x)\, j^{\nu}(x) \tag{3.8}$$

для струму точкового заряду (3.1). Щоб його розв'язати застосуємо метод функцій Гріна:

$$A^{\nu}(x) = 4\pi\int_{U} d^{4}x'\,\Omega^{4}(x') G(x-x')\, j^{\nu}(x'), \tag{3.9}$$

де ми використали позначення $A^{\nu}(x)=A_{\beta}(x)\eta^{\beta\nu}$. Функція Гріна $G(x-x')$ описує відгук на δ–подібне збурення. У цього рівняння існує два розв'язки: спізнена функція Гріна $G^{ret}(x-x')$ та її випередний аналог $G^{adv}(x-x')$, який суперечить принципу спізненої причинності. Ми будемо використовувати спізнену функцію:

$$G^{ret}(x-x')=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(x^0-x'^0-\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} \tag{3.10}$$

Підставимо функцію (3.10) та для струму точкового заряду (3.1) у рівняння (3.9). Отримуємо спізнений потенціал у просторі де Сіттера:

$$A_{\beta}^{ret}=q\frac{u_{\beta}(s^{ret})}{r}\ , \tag{3.11}$$

який обернено пропорційний до спізненої віддалі:

$$r(x)=-\eta_{\alpha\beta}\left(x^{\alpha}-z^{\alpha}(s^{ret})\right)u^{\beta}(s^{ret}). \tag{3.12}$$

Потенціал (3.11) у нековаріантному калібруванні $\partial(\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha})/\partial x^{\mu}=0$ еквівалентний потенціалу Хігучі-Лі [1] у коваріантному калібруванні Лоренца. В термінах стереографічних координат квадрат лінійного елементу (2.7) Всесвіту де Сіттера задовольняє умові конформно плоского простору. Гоббс [24] довів, що в просторі-часі з конформною метрикою нелокальний "хвіст" (1.3) дорівнює нулю (див. також [25]).

Спізнене електромагнітне поле в просторі де Сіттера $F_{\alpha\beta}=\partial_{\alpha}A_{\beta}-\partial_{\beta}A_{\alpha}$ виводимо з потенціалу (3.11) за допомогою правила диференціювання функції спізненого часу:

$$\frac{\partial s^{ret}(x)}{\partial x^{\alpha}}=-k_{\alpha}\ , \tag{3.13}$$

де $k_{\alpha}=K_{\alpha}/r-$ нормалізований вектор $K_{\alpha}=x_{\alpha}-z_{\alpha}(s^{ret})$ від точки на світовій лінії заряду до точки, де вимірюється напруженість електричного поля. Прикметник "нормований" означає властивість $(k\cdot u)=-1$. Цього досить щоб обчислити компоненти напруженості спізненого електромагнітного поля зарядженої частинки:

$$F_{\alpha\beta}^{ret}(x)=\frac{q}{r^2}\Omega^{-2}(x)\left(u_{\alpha}k_{\beta}-u_{\beta}k_{\alpha}\right)+\frac{q}{r}\left[a_{\alpha}k_{\beta}-a_{\beta}k_{\alpha}+(a\cdot k)\left(u_{\alpha}k_{\beta}-u_{\beta}k_{\alpha}\right)\right] \tag{3.14}$$

Усі кінематичні характеристики частинки беруться в момент $s^{ret}(x)$, причинно пов'язаний з точкою x, де вимірюється напруженість поля. Крапка позначає скалярний добуток двох чотири-векторів за допомогою метричного тензора плоского простору-часу.

4. Реакція випромінювання в просторі де Сіттера

Рівняння руху зарядженої частинки виводяться з рівнянь балансу збережених величин, які, згідно з теоремою Нетер, відповідають симетрії проблеми. В роботах [22,23,26] розвинута ідея спеціальної теорії відносності в просторі де Сіттера,

основаної на групі ізометрії цього простору. Набір генераторів відповідних нескінченно малих перетворень наведено в [23].

Група ізометрій SO(4,1) простору де Сіттера містить групу Лоренца SO(3,1) як підгрупу. Набір генераторів відповідних нескінченно малих перетворень [(14), 23]:

$$L_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ . \tag{4.1}$$

Обертання описують ізотропію простору, тоді як бусти вказують на еквівалентність інерціальних систем відліку.

Комбінація звичайних просторових трансляцій і власне конформних перетворень становить чотири некомутативних генератора, які відповідають за однорідність. Генератори [(15), 23]:

$$\Pi_\alpha = \left[1 - \frac{H^2}{4}(x \cdot x)\right] \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{H^2}{2} x_\alpha x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \ . \tag{4.2}$$

Спрямувавши космологічну константу H до нуля, отримаємо звичайні трансляції часу та просторових змінних плоского простору Мінковського.

Відповідно до теореми Нетер, інваріантність інтегралу дії відносно перетворень з групи ізометрії SO(4,1) простору-часу де Сіттера призводить до десяти збережних величин:

- 4-імпульсу де Сіттера [(27),(28), 26]:

$$\pi^\alpha_{part} = \Omega^2(z)\left[\left(2 - \Omega^{-1}(z)\right)\delta^\alpha{}_\beta + \frac{H^2}{2} z^\alpha z_\beta\right] p^\beta_{part} \tag{4.3}$$

- кутового моменту [(29), 26]:

$$\lambda^{\alpha\beta}_{part} = \Omega^2(z)\left(z^\alpha p^\beta_{part} - z^\beta p^\alpha_{part}\right), \tag{4.4}$$

де $p^\alpha_{part} = m\dot{z}^\alpha$.

Ми розглядаємо ізольовану систему, що складається з точкового заряду і його електромагнітного поля. Повний імпульс такої системи зберігається:

$$\Pi^\alpha = \pi^\alpha_{part} + \pi^\alpha_{em}, \tag{4.5}$$

де другий доданок – це імпульс де Сіттера, який переноситься електромагнітним полем (3.14) частинки:

$$\pi^\alpha_{em} = \int_{-\infty}^{t} ds \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Omega^6(x)\Omega^2(z)\left[\left(2 - \Omega^{-1}(x)\right)T^{\alpha\beta}_{dS} r_{,\beta} + \frac{H^2}{2} x^\alpha \left(x_\gamma T^{\gamma\delta}_{dS} r_{,\beta}\right)\right] \tag{4.6}$$

Символом $r_{,\beta}$ позначено частинну похідну спізненої віддалі за координатою:

$$\frac{\partial r}{\partial x^\beta} = -u_\beta + \left[(u \cdot u) + r(a \cdot k)\right]k_\beta. \tag{4.7}$$

Так само зберігається повний кутовий момент:

$$\Lambda^\alpha = \lambda^\alpha_{part} + \lambda^\alpha_{em}, \tag{4.8}$$

з внеском електромагнітного поля:

$$\lambda^{\alpha\beta}_{em} = \int_{-\infty}^{t} ds \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Omega^6(x)\Omega^2(z)\left[x^\alpha T^{\beta\gamma}_{dS} r_{,\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}_{dS} r_{,\gamma}\right] \tag{4.9}$$

У просторі де Сіттера маємо такий тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля:

$$T_{dS}^{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{4\pi}\Omega^{-6}(x)\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\left(F_{\mu\gamma}\eta^{\gamma\delta}F_{\nu\delta}-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}(F_{\sigma\gamma}\eta^{\gamma\delta}F_{\rho\delta}\eta^{\sigma\rho})\right). \tag{4.10}$$

Дуже важливо, що множник $\Omega^{-6}(x)$ нейтралізує множники $\Omega^{6}(x)$ в імпульсі (4.6) та моменті імпульсу (4.9) електромагнітного поля.

Зміни повного імпульсу де Ситтера Π^{α} і кутового моменту Λ^{α} повинні бути збалансовані силою Лоренца f_{ext}, з якою на заряд діє зовнішнє електромагнітне поле, та моментом цієї сили:

$$\dot{\pi}^{\alpha}_{part}+\dot{\pi}^{\alpha}_{em}=\Omega^{2}(z)\left[\left(2-\Omega^{-1}(z)\right)f^{\alpha}_{ext}+\frac{H^{2}}{2}(f_{ext}\cdot z)z^{\alpha}\right], \tag{4.11}$$

$$\dot{\lambda}^{\alpha}_{part}+\dot{\lambda}^{\alpha}_{em}=\Omega^{2}(z)\left(z^{\alpha}f^{\beta}_{ext}-z^{\beta}f^{\alpha}_{ext}\right) \tag{4.12}$$

Щоб провести кутове інтегрування виразів (4.6) та (4.9) використаємо співвідношення:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi K^{\alpha}=U^{\alpha},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi K^{\alpha}K^{\beta}=\frac{1}{3}\eta^{\alpha\beta}+\frac{4}{3}U^{\alpha}U^{\beta},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi K^{\alpha}K^{\beta}K^{\gamma}=2U^{\alpha}U^{\beta}U^{\gamma}+\frac{4}{3}\left(U^{\alpha}\eta^{\beta\gamma}+U^{\beta}\eta^{\alpha\gamma}+U^{\gamma}\eta^{\alpha\beta}\right),$$

де $U^{\alpha}=\Omega\{z\}u^{\alpha}$. Після детального аналізу рівнянь балансу (4.11) та (4.12) отримаємо імпульс де Ситтера (4.3), де в імпульсі зарядженої частинки враховано вклад від її власного електромагнітного поля:

$$p^{\beta}_{part}=M(s)u^{\beta}-\frac{2q^{2}}{3}a^{\beta}+\frac{q^{2}}{4}H^{2}\Omega^{-1}(z)z^{\beta}. \tag{4.13}$$

Цей вираз узагальнює імпульс зарядженої частинки $p^{\beta}_{part}=mu^{\beta}-(2q^{2}/3)a^{\beta}$, що виникає в плоскому просторі-часі. Імпульс «одягненого» заряду складається з члена Шотта та внеску, обумовленого криволінійним фоном, який також змінює динамічну масу заряду:

$$M(s)=m+\frac{q^{2}}{3}H^{2}\Omega(z)(z\cdot u). \tag{4.14}$$

Тут m — константа інтегрування, яку можна інтерпретувати як (вже перенормовану) масу спокою заряду.

Рівняння руху точкового заряду в зовнішньому електромагнітному полі, у якому враховано вплив гравітації та власного поля частинки (реакція випромінювання), виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned}&m\left[a^{\beta}-\frac{H^{2}}{2}\Omega(z)\left(2(z\cdot u)u^{\beta}+\Omega^{-2}(z)z^{\beta}\right)\right]-\frac{2q^{2}}{3}\dot{a}^{\beta}+\frac{2q^{2}}{3}\Omega^{2}(z)(a\cdot a)u^{\beta}\\&+q^{2}H^{2}\Omega(z)(z\cdot u)a^{\beta}+\frac{q^{2}}{3}H^{2}\Omega^{2}(z)\left[\Omega^{-1}(z)\left(-\Omega^{-2}(z)+(z\cdot a)\right)-H^{2}(z\cdot u)^{2}\right]u^{\phi}=f^{\beta}_{ext}\end{aligned} \tag{4.15}$$

В першому рядку бачимо геодезичне рівняння та аналог реакції випромінювання у плоскому просторі, а в другому — доданки, обумовлені гравітаційним фоном. Це рівняння Девітта-Бреме-Гоббса (1.2), адаптоване для метрики де Сіттера $g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}$, символів Крістоффеля (2.11) і тензора Річчі (2.13).

Висновки

Із аналізу збережних величин, які відповідають з групи ізометрії SO(4,1) простору де Сіттера, отримано вираз для реакції випромінювання точкового заряду, що рухається по довільній траєкторії, Зміни енергії-імпульсу та кутового моменту, що переносяться електромагнітним полем, збалансовані відповідними змінами 4-імпульсу та кутового моменту частинки відповідно. Сила реакції випромінювання випливає з цих рівнянь балансу. Окрім невіддільного від заряду доданку Шотта та далекосяжного доданку Лармора, що описує випромінювання, яке розсіюється в просторі, з'являються поправки, обумовлені нетривіальною метрикою. Виявлено, що маса точкового електричного заряду, який рухається у Всесвіті, що розширюється, змінює свою масу спокою через взаємодію електромагнітного поля частинки та гравітації (див. рівняння (4.14). Це було встановлено раніше для скалярного заряду [27,28]. Подібний ефект виникає у плоскому (2+1)-просторі-часі Мінковського [(3.27), 29]. Зміна маси не призводить до порушення закону збереження енергії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. A.Higuchi, and Lee Yen Cheong. How to use retarded Green's functions in de Sitter spacetime // Phys. Rev. D. – 2008. – V. 78. – 084031.
2. B.P.Abbott et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs // Phys. Rev. X. – 2019. – V. 9. – 031040.
3. M. Oltean. Motion of localized sources in general relativity: Gravitational self-force from quasilocal conservation laws // Phys. Rev. D. – 2020. – V. 101. – 064060.
4. W. Price, M. Formanek., and J.Rafelski. Radiation reaction and limiting acceleration // Phys. Rev. D. – 2022. – V. 105. – 016024.
5. R. Ekman, T. Heinzl, and A. Ilderton. Reduction of order, resummation, and radiation reaction // Phys. Rev. D. – 2021. – V. 104. – 036002.
6. A.D.Yaghjian. Lorentz-Abraham-Dirac and Landau-Lifshitz equations of motion and the solution to a relativistic electron in a counterpropagating laser beam // Phys. Rev. Accel. Beams. – 2021. – V. 24. – 114002.
7. A. Noble et al. Self-force on a charged particle in an external scalar field // New J. Phys. – 2021. – V. 23. – 115007.
8. T.G. Blackburn. Radiation reaction in electron-beam interactions with high-intensity lasers // Rev. Mod. Plasma Phys. – 2020. – V.4. – 5.

9. D. Andriot and G.L.Gómez. Signatures of extra dimensions in gravitational waves // Cosmol. Astrophys. Phys. – 2017. – V. 06. – 048.
10. D.V. Gal'tsov and M.Khlopunov. Synchrotron radiation in odd dimensions // Phys. Rev. D. – 2020. – V. 101. – 084054.
11. H.A. Lorentz. The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat (Nabu Press, SC, 2010); Теория электронов, (Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1956)
12. M. Abraham. The Classical Theory of Electricity and Magnetism (Blackie & Son Ltd, London, 1949)
13. P.A.M. Dirac. Classical Theory of Radiating Electrons // Proc.R.Soc.Lond. A. – 1938. – V. 167 (929). – P. 148-169.
14. B.S. Dewitt and R.W. Brehme. Radiation Damping in a Gravitational Field // Ann. Phys. – 1960. – V. 9. – 220-259.
15. J.M. Hobbs. A Vierbein Formalism of Radiation Damping // Ann. Phys. – 1968. – V. 47. – 141-165.
16. E. Poisson, A. Pound, and I. Vega. The motion of point particles in curved spacetime // Living Rev. Rel. – 2011. – V. 14. – 7-190.
17. S. Detweiler and B.F. Whiting. The Self-force via a Green's function decomposition // Phys. Rev. D. – 2003. – V. 67. – 024025.
18. A.I. Harte. Approximate spacetime symmetries and conservation laws // Class. Quantum Grav. – 2008. – V. 25. – 205008.
19. A.I. Harte. Electromagnetic self-forces and generalized Killing fields // Class. Quantum Grav. – 2009. – V. 26. – 155015.
20. L. Boyle, K. Finn, and N. Turok. The Big Bang, CPT, and neutrino dark matter // Ann. of Phys. – 2022. – V. 438. – 168767.
21. T. Müller and F. Grave. Catalogue of Spacetimes // ArXiv:0904.4184v3 [gr-qc] 4 Nov 2010.
22. R. Aldrovandi, J.P. Beltrán Almeida, and J.G. Pereira. Cosmological term and fundamental physics // Int. J. Mod. Phys. D – 2004. – V. 13. – 2241-2248.
23. R. Aldrovandi, J.P. Beltrán Almeida, and J.G. Pereira. de Sitter special relativity // Class. Quantum Grav. – 2007. – V. 24. – 1385-1404.
24. J.M. Hobbs. Radiation Damping in Conformally Flat Universes // Ann. Phys.– 1968. – V. 47. – 166-172.
25. M.D. Roberts. The motion of a charged particle in a spacetime with a conformal metric // Class. Quantum Grav. – 1989. – V. 6. – 419-423.
26. R. Aldrovandi, J.P. Beltrán Almeida, C.S.O. Mayor, and J.G. Pereira. de Sitter Relativity and Quantum Physics // AIP Conf. Proc. – 2007. – V. 962. – 175-188.
27. L.M. Burko, A.I. Harte, and E. Poisson. Mass loss by a scalar charge in an expanding universe // Phys. Rev. D, – 2002. – V. 65. – 124006.
28. R. Haas and E. Poisson. Mass change and motion of a scalar charge in cosmological spacetimes // Class. Quantum Grav. – 2005. – V. 22. – S739-S752.

29. Yu.Yaremko. Radiation reaction in 2+1 electrodynamics // J. Math. Phys. – 2007. – V. 48. – 092901.

Yu. Yaremko
[1]*Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Svientsitskii Str. 1, 79011, Lviv*
e-mail: yar@icmp.lviv.ua

RADIATION REACTION OF A POINT CHARGE IN DE SITTER SPACE

The paper is concerned with the motion of a point electric charge in de Sitter spacetime. A point particle of mass m and charge q moving on a geodesic curve produces electromagnetic field that diverges at a particle's position. The field is determined by the electromagnetic Green's function by Higuchi and Lee [1]. Effective equations of motion is derived from conservation laws corresponding to the group of isometry of de Sitter space. Following the Detweiler-Whiting concept that a charge's motion should only be enforced by the regular component of its own field, we ignore the divergent terms in conservation laws. We assume that the divergencies are absorbed by particle's individual characteristics within the renormalization procedure.
Keywords: de Sitter spacetime, Maxwell equations, conservation laws, renormalization, radiation reaction.

O. Bukalov
The Centre for Physical and Space Research of the International Institute of Socionics,
Illenko Str., 12, 04050, Kyiv, Ukraine.
e-mail: boukalov@gmail.com

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE COSMOLOGICAL CONSTANT

Calculating the vacuum energy density in quantum field theory gives a value that exceeds the observed value by 10^{122} times, and many proposed approaches have not solved this problem and calculated its real value. However, the application of the microscopic theory of superconductivity to the description of the physical vacuum on the Planck scale for the first time made it possible to solve the problem of the cosmological constant from basic principles, and without various adjustments, and to obtain a formula for the observed vacuum density or dark energy (DE). Its numerical value is $6.09 \cdot 10^{-27}$ kg/m^3 and is in complete agreement with observations. The cosmological model with superconductivity (CMS) proposed by the author also implies a description of the earliest stage of the evolution of the Universe, which precedes the stage of inflation. It de-scribes the formation of the inflaton field as a special condensate of primordial fermions with a Planck mass, followed by the inflationary expansion of the early Universe. At the same time, the current expansion of the Universe and its evolution is described as an ongoing phase transition of the second kind, and the flow of physical cosmological time is a consequence of processes occurring on Planck scales. The value of the Hubble parameter H_0=69.76 km·s^{-1}·Mpc^{-1} calculated in CMS corresponds to the average value for most values of this parameter obtained by various methods. CMS removes the problem of the existence of 10^{500} possible vacua arising in string theory, since the mechanism of condensation of primary fermions naturally forms the only observable version of the Universe and its vacuum. CMS also gives a description of black holes as a quantum condensate of primordial fermions.
Key words: vacuum energy density, superconductivity, cosmological constant, cosmology, cosmological model with superconductivity, inflation, phase transitions, passage of time, string theory, shadow matter, fine structure constant, Hubble parameter, Kaluza–Klein theory.

1. Introduction

The problem of the cosmological constant [1] or the dark energy problem is the one of the most important and difficult in modern cosmology. A number of authors have proposed many options for solving this problem, but almost all of them do not provide an opportunity to accurately calculate the value of the density of dark energy.

In addition, as is known, standard estimates in the framework of quantum field theory give vacuum energy density values that are 10^{122} times higher than the observed one: $\rho_v \approx \int_0^{E_P} E^3 dE \approx E_P^4 \approx (10^{19}\ \text{GeV})^4$, where $E_P = (\hbar c^5 / G_N)^{1/2}$ is the Planck energy.

According to John A. Wheeler's hypothesis, it is usually assumed that space-time on the Planck scale has a foamy structure [2]. However, in the works of P. I. Fomin [3, 4] it is shown that quasi-closed worlds of Planck dimensions can form regular structures [3], a crystal-like lattice with cells of the Planck order, acting as "space atoms": $L_P = (G_N \hbar / c^3)^{1/2}$.

Since these worlds are quasi-closed objects, their effective mass is close to zero. At the same time, they must interact with each other by quadrupole gravitational forces. The additional energy contributions of vacuum condensates to the vacuum energy density are automatically compensated due to the corresponding deformation of space atoms.

Because of this, P. I. Fomin in 1989 proposed to consider the physical vacuum as a four-dimensional gravitational quantum crystal with energy bands that correspond to generations of observed fermions.

Indeed, the connection between quantum solid state physics and elementary particle physics is fairly obvious. Moreover, they use not only the same mathematical apparatus, but also in modern solid state physics there are analogues of a number of elementary particles, and in the so-called. Many processes describing the evolution of the Universe, including inflation, are modeled in metamaterials.

According to P. I. Fomin, all particles in the Universe as vacuum excitations are completely similar to quasi-particles living in a crystal, however, the space of a crystal is completely empty for them, although from an external point of view it has a regular ordered structure.

Let's take the next step in describing such a structure of the physical vacuum.

2. Structure of the vacuum on the Planck scale and superconductivity

Let us consider such a crystal-like structure not just as an analogue of a solid body, but as a structure similar to the structure of a metal, in which there are free primary fermions [5–10].

These fermions can interact with a spatial crystal-like lattice, and under certain conditions can pair through phonon interaction, similar to the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) mechanism [9] for electrons in a metal with the formation of a Bose condensate.

Thus, pairing of fermions can occur near the Fermi surface of this spatial “quasicrystal”. In this case, the maximum oscillation frequency of a crystal-like lattice, as an analogue of the Debye frequency, is close to the Planck frequency: $\omega_D \approx \omega_P$.

In [5–7] we described the process of formation of dark energy as a condensate of primary fermions, by analogy with the theory of superconductivity by Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS). It gives a better understanding of the dark energy nature.

Let us consider the degenerate almost ideal Fermi gas with attraction between the particles, which are the primary fermions with a mass close to the Planck mass: $M \approx M_P$.

It is well known, that even in the presence of an arbitrarily weak attraction between the particles, the ground state of the system is unstable respect to the restructuring, changing whole system and lowering its energy. This instability arises from the Cooper effect, i.e. aspiration to the formation of bound states of fermions pairs that are in the p-space near the Fermi surface and have momenta equal in direction and antiparallel spins.

3. The energy spectrum of the superfluid gas

Let’s consider the degenerate almost ideal Fermi gas with attraction between the particles, which are the primary fermions with a mass close to the Planck mass: $M \approx M_P$.

It is well known, that even in the presence of an arbitrarily weak attraction between the particles, the ground state of the system is unstable respect to the restructuring, changing whole system and lowering its energy [9, 10]. This instability arises from the Cooper effect, i.e. aspiration to the formation of bound states of fermions pairs that are in the p-space near the Fermi surface and have momenta equal in direction and antiparallel spins. For consideration of this problem, following to [10], we introduce the Bogolyubov transformation of the operators, which bring together the operators of the particles with opposite momenta and spins:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathrm{p}^-} &= u_p \hat{a}_{\mathrm{p}^-} + v_p \hat{a}^+_{-\mathrm{p},+}, \\ \hat{b}_{\mathrm{p}^+} &= u_p \hat{a}_{\mathrm{p}^+} - v_p \hat{a}^+_{-\mathrm{p},-}, \end{aligned} \quad . \tag{8}$$

The indexes + and – refer to the two values of the spin projection. With gas isotropy the coefficients u_p, v_p can depend only on the absolute value of the momentum p. The operators comply with the creation and annihilation of quasiparticles on condition:

$$\hat{b}_{\mathrm{p}\alpha}\hat{b}^{+}_{\mathrm{p}\alpha} + \hat{b}^{+}_{\mathrm{p}\alpha}\hat{b}_{\mathrm{p}\alpha} = 1, \tag{9}$$

where the index α numbers the two values of the spin projection. Other pairs of operators are anticommutative. Therefore, the transform coefficients are imposed a condition:

$$u_p^2 + v_p^2 = 1. \tag{10}$$

The transformation inverse to $\hat{b}_{\mathrm{p}^-}, \hat{b}_{\mathrm{p}^+}$ takes the form

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathrm{p}^-} &= u_p\hat{b}_{\mathrm{p}^+} + v_p\hat{b}^{+}_{-\mathrm{p},-}, \\ \hat{a}_{\mathrm{p}^+} &= u_p\hat{b}_{\mathrm{p}^-} - v_p\hat{b}^{+}_{-\mathrm{p},+}. \end{aligned} \tag{11}$$

Due to the primary role of the interaction between pairs of particles with opposite momenta and spins only write the Hamiltonian with the members, in which $\mathrm{p}_1 = -\mathrm{p}_2 \equiv \mathrm{p},\ \mathrm{p}_1' = -\mathrm{p}_2' \equiv \mathrm{p}'$:

$$\hat{H} = \sum_{\mathrm{p}\alpha} \frac{p^2}{2m}\hat{a}^{+}_{\mathrm{p}\alpha}\hat{a}_{\mathrm{p}\alpha} - \frac{g}{V}\sum_{\mathrm{pp}'}\hat{a}^{+}_{\mathrm{p}'+}\hat{a}^{+}_{-\mathrm{p}',-}\hat{a}_{-\mathrm{p},-}\hat{a}_{\mathrm{p}+}, \tag{12}$$

where $g = 4\pi\hbar^2|b|/m$ is a “coupling constant”, $b < 0$ is the scattering length.

Following to Pitaevskii L.P. & Lifshitz E.M. [10], we get the value of the energy gap:

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon}\exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar^3}{gmp_F}\right) = \tilde{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}\right). \tag{13}$$

or

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon}\exp(-2/g\chi_F), \tag{14}$$

where $\chi_F = mp_F/\pi^2\hbar^3$ is the energy density of the particle states on the Fermi surface, p_F is a momentum of a fermion at the Fermi surface, $g = 4\pi\hbar^2|b|/m$ is a “coupling constant”, $b < 0$ is the scattering length.

The energy of elementary excitations with a change in the filling of quasiparticles is:

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \sqrt{\Delta^2 + \eta_p^2}, \\ \eta_p &= v_F(p - p_F) \end{aligned} \tag{15}$$

where $v_F = p_F/m$. Thus, the energy of quasiparticles cannot be less than Δ. For $p = p_F$ $\varepsilon(p) = \Delta.$

Therefore, the excited states of the system are separated from the main energy gap, as well as the quasi-particles must appear in pairs, it is possible to write down the value of this gap as 2Δ. From $\varepsilon(p) \neq 0$ it follows that the Fermi gas has superfluidity. Thus from quasiparticles with energies $\varepsilon(p)$ a gas appears, which translationally moves as a single unit relative to the fluid with velocity v. Such gas from quasiparticle corresponds to the normal component of the superfluid. The rest of the liquid will behave like a superfluid component. The density of such superfluid liquid is equal to the sum of the normal and superfluid components: $\rho = \rho_n + \rho_s$.

The energy 2Δ is the energy of the Cooper pairs. It must be expended to break a pair. The value of the distance between the particles with correlated momenta, or the coherence length, is $\xi_0 = \pi v_F / \Delta_0 = \hbar e^{\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}} / p_F$.

From thermodynamics of superfluid Fermi gas it follows [10] that $\Delta = 0$, when $T_c = \gamma\Delta_0 / \pi \approx 0.57\Delta_0$

$$\Delta = T_c \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)} = 3.063T_c\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}\,. \tag{16}$$

The difference between the basic levels of the superfluid and normal systems is [10]:

$$E_s - E_n = -V\frac{mp_F}{4\pi^2\hbar^3}\Delta_0^2. \tag{17}$$

The sign "–" in (17) is the instability of the "normal" ground state in the case of attraction between gas particles. On one particle it falls $\sim \Delta^2 / \mu$.

Hence the difference of entropies is:

$$S_s - S_n = -V\frac{4mp_F T_c}{7\zeta(3)\hbar^3}\left(1-\frac{T}{T_c}\right). \tag{18}$$

In the case $T \to T_c$ with regard to (16) the difference between the free energies [10] is equal to

$$F_s - F_n = -V\frac{2mp_F T_c^2}{7\zeta(3)\hbar^3}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2. \tag{19}$$

We apply the theory outlined above to describe the dark energy of the Universe and the calculation of its density. Let's transform (17) into the expression for the density:

$$-\Delta\rho = \frac{E_s - E_n}{V} = -\frac{mp_F}{4\pi^2\hbar^3}\Delta_0^2. \tag{20}$$

The observed density of dark energy can be regarded as the binding energy of the fermions. Therefore, considering it as the difference between the densities of the energies of the levels of the superfluid and normal systems, it is necessary to attribute this difference as negative, indicating instability of the normal ground state for an arbitrarily small attraction between fermions, according to (20).

With $\Delta\rho = \rho_{DE} = \Lambda / 8\pi G_N = mp_F\Delta_0^2 / 4\pi^2\hbar^3$ we choose, for example, $v_F = \pi c / 8$, in order to the fermion velocity on the Fermi surface was lower than the speed of light. Then

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon}e^{-\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}} = \frac{M_P e^{-\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}}}{4\pi} = \frac{M_P e^{-\frac{\pi\lambda_F}{2|b|}}}{4\pi} = \frac{M_P e^{-\frac{1}{\lambda_i}}}{4\pi}. \tag{21}$$

where M_P is the Planck mass.

At $\Lambda = \Delta_0^2 / 4 = \tilde{\varepsilon}^2 e^{-2\frac{\pi\hbar}{2p|b|}} = \tilde{\varepsilon}^2 e^{-2/\lambda_i}$, where λ_i is the constant of fermions interaction. We estimate the value of λ_i. Since $\Lambda^{1/2} = \tilde{\varepsilon} / e^{1/\lambda_i} = M_P / e^{1/\lambda_i} C$, then assuming a natural cutoff parameter of maximum energy equal to $\tilde{\varepsilon} = M_P$, when $\lambda_i \cong \alpha_{em} = (137.0599)^{-1}$ and $C = 8\pi$, we obtain:

$$\rho_{DE} = \frac{1}{4\pi G_N\left|8\pi t_P e^{1/\lambda_i}\right|^2} = \frac{1}{256\pi^3 G_N^2}\frac{c^5}{\hbar e^{2\alpha_{em}^{-1}}}, \tag{22}$$

$\rho_{DE} = 6.09 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{g/m^3}$ in excellent agreement with the PLANK data [11].

J. Prat, C. Hogan, C. Chang, J. Frieman obtain $\rho_\Lambda=(6.03\pm0.13)\cdot10^{-30}\mathrm{g/cm^3}$ as "the most accurate constraint to date, with an absolute calibration of cosmological measurements based on CMB temperature" [12].

Note that the smallness of the energy gap Δ_0 compared to the Planck energy makes the use of the nonrelativistic BCS approach completely justified and quite sufficient, even at Grand Unified energies.

Thus, in the modern era, at $z = 0$, the observed density of dark energy interaction parameter of primary fermions is very close to the electromagnetic fine structure constant α_{em} or equal to it. There are two possibilities: either the interaction of fermions has electromagnetic nature, or the equality $\lambda_i \cong \alpha_{em}^{-1}$ points to the existence of "shadow" or "mirror" long-range interactions, like the electromagnetic ones (for example, "dark photons"), and a number of corresponding charges from the shadow sectors of matter q_i, q_j, q_k,…, some of them may be equal in magnitude with the electric charge. Then

$$\lambda_i = \frac{q_i^2}{\hbar c},\ \lambda_j = \frac{q_j^2}{\hbar c},\ \lambda_k = \frac{q_k^2}{\hbar c} \ldots . \tag{23}$$

The existence of shadow electric charges and their corresponding shadow electromagnetic fields can be described in extended versions of the Kaluza-Klein theory with additional microscopic dimensions.

The condensation of primordial fermions forms a scalar field, which is used in inflation theories.

If the parameters λ_i, λ_j, λ_k,… are similar to α_{em}, then we can estimate the dynamics of their change depending on the energy density in the early Universe. Let us consider the process of formation of modern values of dark energy in the hot early Universe. As we know from quantum electrodynamics, the value of the electromagnetic fine structure constant is a function of the four-momentum Q^2:

$$\alpha_i^{-1} = \alpha_{em} - \frac{\beta}{3\pi}\ln\left(\frac{Q}{2m_e}\right)^2 . \tag{24}$$

For $\lambda_i \sim \alpha_{em}$, m_x is equal to the electron mass m_e, and the effective dark energy density is:

$$\rho_{DE} = \frac{\Lambda}{8\pi G_N} = \frac{c^5}{256\pi^3 G_N^2 \hbar e^{2\left(\alpha_{em}^{-1} - \frac{\beta}{3\pi}\ln\left(\frac{E}{4m_e}\right)^2\right)}} = \frac{c^5}{256\pi^3 G_N^2 \hbar e^{2\alpha_{em}^{-1}}}\left(\frac{Q}{2m_e}\right)^{\frac{4\beta}{3\pi}}, \tag{25}$$

where $Q = kT/c$ is momentum of radiation quanta in the early Universe. In this particular case, ρ_{DE} reaches a minimum and becomes constant at $Qc = 2m_e c^2 = 1.022\,\mathrm{MeV}$.

In the general case, the laws of change in the parameters λ_i, λ_j, λ_k,…, may not be related to the dynamics of changes in α_{em} and $m_x \neq m_e$.

Because dark energy is the only one of the components of the observable Universe, but it is comparable to other, so it is rightful to consider the energy density of the entire observable Universe as evolving dynamically changing difference of density of normal and superfluid fermion systems, i.e. being in a state of a phase transition with changing energy density. Then the density $\Delta\rho$ can be identified with the critical density of the Universe. When

$$\Delta\rho = \rho_c = \frac{3}{8\pi G_N} H_0^2 = \frac{mp_F}{4\pi^2\hbar^3}\Delta_0^2 \qquad (26)$$

and $m = M_P$, choose $p_F = \pi M_P c/4$, in order to the fermion velocity on the Fermi surface will be lower than the speed of light. Then the square of the dynamically changing energy gap determines the Hubble radius: $\Delta_0^2 = 6H_0^2$. That means that the time parameter t_H is a function of the occurring phase transition of type II, corresponding to the Universe evolution and the variable λ_j:

$$\Delta_j = \frac{\tilde{\varepsilon}}{e^{\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}}} = \frac{M_P}{4\pi e^{\frac{\pi\hbar}{2p_F|b|}}} = \frac{M_P}{4\pi e^{\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_F}{|b|}}} = \frac{M_P}{4\pi e^{\frac{1}{\lambda_j}}}. \qquad (27)$$

4. The Hubble parameter

From $t_H = H_0^{-1} = 1.4\cdot 10^{10}$ years, $t_H = 8\pi t_P e^{\lambda_j^{-1}} = 8\pi t_P e^{\frac{\pi\lambda_{F_j}}{2|b|}}$, $\lambda_j^{-1} = \pi\lambda_{F_j}/2|b| \approx 137 \cong \alpha_{em}^{-1}$ at $z = 0$, where α_{em} is the fine structure constant. In this case, the Hubble radius is determined by the distance between the interacting fermions, or the coherence length, $\xi_0 \approx ct_H$.

The critical density corresponds to the Hubble parameter with a value $H_0 = 69.76$ km·s^{-1}·Mpc^{-1}

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G_N} H_0^2 = \frac{3}{8\pi G_N}\left(\frac{1}{8\pi t_P e^{\lambda_j^{-1}}}\right)^2 = \frac{3}{8\pi G_N}\left(\frac{1}{8\pi t_P} e^{\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_F}{|b|}}\right)^2 \approx 9.14\cdot 10^{-30}\,\text{g/sm}^3.. \qquad (28)$$

This value ρ_c is in good agreement with the observational results. It is noteworthy that the value of H_0 obtained in the cosmological model with superconductivity (CMS), proposed by us, is the arithmetic mean between the value obtained by PLANK (H_0 = 67.4 ± 0.5 km·s^{-1}·Mpc^{-1}) [11] and the local value obtained from Cepheids (H_0 = 73.04 ± 1.04 km·s^{-1}·Mpc^{-1}) [13], and within the limits of error it coincides with the values obtained by other methods:

$H_0 = 69.8 \pm 1.3$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [14],
$H_0 = 69.5 \pm 1.7$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [15],
$H_0 = 69.0 \pm 1.1$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [16],
$H_0 = 69.51{+}0.70 - 0.65$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [17],
$H_0 = 69.79 \pm 0.99$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [18],
$H_0 = 69.82{+}0.63 - 0.76$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [19],
$H_0 = 69.74{+}1.60 - 1.56$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [20],
$H_0 = 69.88 \pm 0.76$ km·s^{-1}·Mpc^{-1} [21].

It should be noted that the proximity of the dark energy density value of the critical density of matter and generally can be explained by the proximity or the equality of the interaction parameters in the modern era. Such equality can be explained by the approximation of the various parameters λ_i to a single value, similar to the behavior parameters in the era of Grand Unification: $\lambda_i \cong \lambda_j \cong \lambda_z \cong \lambda_{em}$. Thus, the observed dark energy and matter can be regarded as a set of quasi-particles with energy of communication of primary fermions. Therefore, the observed world can be seen as the difference between two energy levels of a fermion system,

which density is close to the Planck density: $\rho_n = \rho_P \approx 3M_P^4 / 8\pi$, $\rho_s = \rho_n - \rho_c = 3(M_P^4 - M_P^2\Delta_j^2) / 8\pi$.

Thus, we can describe the observed critical density of the Universe as the difference between the densities of the superfluid and normal fermion systems, and this process is dynamic, providing the energy difference, which coincides with the energy of the observable Universe. Therefore, in the beginning we can start from the Planck density, when $\rho_s = 0$, to $\rho_{P_n} - \rho_{s(t)} = \rho_{GUT}$ and then to $\rho_s \to \rho_P \left| 1 - e^{2/\lambda_j} \right|$.

Let's note that the obtained energy density equations also naturally describe the exponential expansion of the early Universe.

Let's apply the developed theory to describe black holes. When $\Delta_g^2 = 6 / R_g^2$, $p_F = m_p \pi c / 4$

$$\rho_{BH} = \frac{3}{8\pi} \frac{c^2}{G_N R_g^2} = \frac{m p_F}{4\pi^2 \hbar^3} \Delta_g^2 . \qquad (29)$$

The value obtained by Δ_g^2 corresponds to the scalar curvature and is determined by the gravitational radius of the black hole.

Therefore, in the framework of the cosmological model with superconductivity (CMS), we can consider black holes as a gravitational condensate of primary fermions.

Thus, a cosmological model with superconductivity (CMS) arises, which makes it possible to give a new description of a whole series of cosmological processes.

5. The Hubble parameter

From our proposed cosmological model with superconductivity (CMS), a number of consequences are derived:

3. Within the limits of the theory of superconductivity the real value of density of dark energy as density of energy interactions of a primary fermions condensate is received. These fermions do not give a contribution to observable energy density. The contribution to observable forms of energy is given only by the interaction energy of the primary fermions.
4. Initial exponential expansion of the vacuum-like Universe within the limits of superconducting cosmology allows to provide the birth of the hot Universe and solves the same problems which are solved by an inflationary cosmology.
5. Origin of cosmological time becomes clear: $t_U \approx t_H$ in the observable Universe time is a consequence of proceeding phase transition of II kind, which is similar to the phase transition, which has created the up-to-date vacuum energy density with change and fixing of a fine-structure constant $\alpha_j = \ln \left| t_H / 8\pi t_P \right|$. This also solves the problem of time irreversibility. Therefore, the evolution of the entire observable Universe can be described as an ongoing second-order phase transition.
6. The closeness of the densities ρ_{DE}, ρ_M and ρ_c (coincidence problem) is due to the similarity or identity of the interaction constants: $\alpha_i \cong \alpha_j \cong \alpha_{em}$.
7. If the observer is at a point close to the end of the phase transition, he records the coincidence of a number of dynamic and static quantities, such as the Large Dirac numbers, etc., which also happens in reality.
8. Black holes can be described as gravitational condensates of primordial fermions.

9. The transition from the macroscopic classical dynamics of general relativity to the microscopic dynamics of fermions near the Fermi surface shows that the real structure and dynamics of space-time are described by coherent quantum processes. In particular, the evolutionary cosmological time parameter itself is determined by the dynamics of microscopic quantum processes on Planck scales.
10. The macroscopic nature of the observed space-time is provided by the factor $e^{\alpha^{-1}}$, which varies in the range from 1 to $3.26 \cdot 10^{59}$ and determines the scale of coherence of quantum processes in superconducting cosmology.
11. Instead of 10^{500} variants of worlds possible in superstring theory, CMS has a single version with several variables λ_i, λ_j, λ_k,… which run through all possible ranges during the evolution of the Universe.

LIST OF REFERENCES

1. S.Weinberg. The cosmological constant problem // Reviews of Modern Physics. – 1989. – V.61 (1), APS. – P. 1–23. – doi:10.1103/RevModPhys.61.1.
2. J.A.Wheeler. Geons // Physical Review. – 1955. – V. 97 (2), APS. – P. 511–536. – doi:10.1103/PhysRev.97.511.
3. P.I.Fomin. Zero cosmological constant and Planck scales phenomenology / Proc. of the Fourth Seminar on Quantum Gravity. (Singapore: World Scientific, 1988). — P. 813.
4. P.I.Fomin. On the crystal-like structure of physical vacuum at Planck distances / Problems of physical kinetics and solid state physics. (Kyiv: Naukova dumka, 1990). — P. 387–398.
5. A.V.Bukalov. On solving the problem of the cosmological constant // Proc. of 12-th Odessa Intern. Astronomical Gamow Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radio-astronomy and Astrobiology” 20-26 August, 2012, Odessa, Ukraine. — P. 28.
6. A.V.Bukalov. A solution to the cosmological constant problem, the possible nature of the physical time and the origin of the baryon charge // 5-th Gamow International Conference in Odessa “Astrophysics and Cosmology after Gamow: progress and perspectives”, 16-23 August, 2015, Odessa, Ukraine.
7. A.V.Bukalov. The solution of the cosmological constant problem and the formation of the space-time continuum // Odessa Astron. Publ. – 2016. – V. 29 (1). – P. 42–45. – doi:10.18524/1810-4215.2016.29.84962.
8. A.V.Bukalov. On the solution of the problem of the cosmological constant // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics”. Book of Abstracts. – 2024. – P. 21.
9. J.Bardeen, L.N.Cooper, J.R.Schrieffer. Theory of Superconductivity // Physical Review. – 1957. – V. 108 (5), APS. – P. 1175–1204. – doi:10.1103/PhysRev.108.1175.
10. L.P.Pitaevskii, E.M.Lifshitz. Statistical Physics. Part 2 (Moscow, 1980).
11. Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters (Corrigendum) // Astronomy and Astrophysics. – 2021. – V. 652.
12. J.Prat, C.Hogan, C.Chang, J.Frieman. Vacuum energy density measured from cosmological data // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2022. – V. 2022 (6). – P. 015. – doi:10.1088/1475-7516/2022/06/015.
13. A.G.Riess, L.Breuval. The Local Value of H_0 // IAU Symposium. – 2024. – V. 376. – P. 15–29. – doi:10.1017/S1743921323003034. arXiv:2308.10954.

14. S.Cao, B.Ratra. H_0=69.8 ±1.3 km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_{m\,0}$=0.288 ±0.017, and other constraints from lower-redshift, non-CMB, expansion-rate data // *Physical Review D*. – 2023. – V. 107 (10), APS. – doi:10.1103/PhysRevD.107.103521.1.
15. F.Renzi, A.Silvestri. A look at the Hubble speed from first principles // arXiv e-prints. – 2020. – doi:10.48550/arXiv.2011.10559.
16. M.Forconi, S.Ruchika, A.Melchiorri, O.Mena, N.Menci. Do the early galaxies observed by JWST disagree with Planck's CMB polarization measurements? // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2023. – V. 2023 (10), IOP.
17. S.Gariazzo, E.Di Valentino, O.Mena, R.C.Nunes. Late-time interacting cosmologies and the Hubble constant tension // Physical Review D. – 2022. – V. 106 (2), APS. – doi:10.1103/PhysRevD.106.023530. arXiv:2111.03152v2.
18. A.Chudaykin, D.Gorbunov, N.Nedelko. Exploring an early dark energy solution to the Hubble tension with Planck and SPTPol data // Physical Review D. – 2021. – V. 103 (4), APS.
19. M.Lucca, D.C.Hooper. Shedding light on dark matter-dark energy interactions // Physical Review D. – 2020. – V. 102 (12), APS. – doi:10.1103/PhysRevD.102.123502.
20. C.Krishnan, E.Ó.Colgáin, S.Ruchika, M. M.Sheikh-Jabbari, T.Yang. Is there an early Universe solution to Hubble tension? // Physical Review D. – 2020. – V. 102 (10), APS.
21. W.L.Freedman, B.F.Madore. Progress in direct measurements of the Hubble constant // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2023. – V. 2023 (11), IOP.

О. Букалов
[1] Центр фізичних та космічних досліджень Міжнародного інституту соціоніки, вул. Іллєнка, 12, 04050, м. Київ, Україна.
e-mail: boukalov@gmail.com

ПРО ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОСМОЛОГІЧНОЇ СТАЛОЇ

Розрахунок густини енергії вакууму в квантовій теорії поля дає значення, що перевищує спостережуване значення в 10^{122} рази, і численні запропоновані підходи не вирішують цю проблему, та не дають можливості не розрахувати її реальне значення. Проте застосування мікроскопічної теорії надпровідності до опису фізичного вакууму в планківському масштабі вперше дозволило вирішити проблему космологічної сталої з базових принципів, і без різноманітних поправок отримати формулу для спостережуваної густини темної енергії. Її числове значення становить $6{,}09\cdot10^{-27}$ кг/м^3 і повністю відповідає спостереженням. Запропонована автором космологічна модель з надпровідністю (CMS) також передбачає опис найбільш ранньої стадії еволюції Всесвіту, яка передує стадії інфляції. Вона описує формування інфлатонного поля як особливого конденсату первісних ферміонів із планківською масою, з подальшим інфляційним розширенням раннього Всесвіту. При цьому сучасне розширення Всесвіту і його еволюція описується як поточний фазовий перехід другого роду, а плин незворотнього фізичного космологічного часу є наслідком процесів, що відбуваються на планківських масштабах. Розраховане в CMS значення параметра Хаббла H_0=69,76 км·с$^{-1}$·Мпк$^{-1}$ відповідає середньому значенню для більшості значень цього параметра, отриманих різними методами. CMS усуває проблему існування 10^{500} можливих вакуумів, що виникають у теорії струн, оскільки механізм конденсації первинних ферміонів природно формує єдину спостережувану версію Всесвіту та його вакууму. CMS також описує чорні діри як квантовий конденсат первісних ферміонів.

Ключові слова: густина енергії вакууму, надпровідність, космологічна стала, космологія, космологічна модель з надпровідністю, інфляція, фазові переходи, плин часу, теорія струн, тіньова матерія, стала тонкої структури, параметр Хаббла, теорія Калуци–Клейна.

Jean-Pierre Magnot
LAREMA, Université d'Angers et Lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand, France
e-mail: jp.magnot@gmail.com

MULTIVALUED PAIRWISE COMPARISONS FROM HIGH ENERGY PHYSICS AND GAUGE THEORY TO DECISION THEORY

We extend here the mathematical setting for pairwise comparisons to multiple values. The geometry of such objects is sketched, and the relation with existing theories is given.
Keywords: Pairwise comparisons, physics of information, decision theory. MSC (2020): 90B99, 81T13

INTRODUCTION

Pairwise comparisons are a key tool in decision theory. Roughly speaking, they serve as a basic evaluation to a finite number of items, intending to give to them a ranking despite the inconsistency of evaluations by pairs. The importance of pairwise comparisons in decision theory is so central and high that a long list of publications would not be sufficiently exhaustive to give tribute to all the contributors. One can see e.g. [1] for a key concise work. We have recently linked explicitely inconsistency in pairwise comparisons (PC) with Yang-Mills theories, showing a possible (non-Abelian) generalization of the classical framework [10, 11]. Moreover, we have linked pairwise comparisons with physics of information [2] and their link with contextually. Finally, when investigating random values for pairwise comparisons [13], we have highlighted the mathematical central role of this construction for various purposes beyond the reduction of the inconsistency: discretized gauge theories, Feynman-Kac like integral formulas, finite elements methods, singular (co-) homology among others.
We present here a setting which considers only finitely multivalued gauges, over a unique simplex Δ_n where 0−vertices stand for the states that have to be compared. A (trivial) G−bundle over Δ_n is the base of the construction, and (univoque) gauges are given by $(n+1)$ values in G, while a connection is given by $\frac{n(n-1)}{2}$ independent values in G, since these values roughly correspond to the homonymies of the connection along the edges along the lines of loop quantum gravity [15, 11]. Motivated by information physics (see the recent work [13]), considering T-duality and non-geometric fluxes as a model for 2-valued fibered gauges along the lines of e.g. [1], we also have the Monte Carlo approximations of pairwise comparisons with values in probability measures as a technical goal, to be developed elsewhere. Few motivating examples and aspects will be briefly
discussed at the end of the communication, while the structures described here intend to be the common constructions for all these non-equivalent frameworks.

1. A SHORT OVERVIEW OF FINITE CONFIGURATIONS AND BRANCHEDCONFIGURATIONS

Following [8], we set a locally compact manifold N, identified with a set of Dirac

measures.

Let I be a set of indexes that is assumed here to be a finite subset of N (typically, $I = N_k = \{1, ..., k\}$). We define the **ordered** configuration spaces.

$$O\Gamma^k = \left\{ (u_1 ... u_k) \in N^k O \quad \text{such that, if } i \neq j, u_i \neq u_j \right\}$$
$$O\Gamma = \prod_{k \in N^*} O\Gamma^k.$$

The general configuration spaces are not ordered. Let Σ_k be the group of bijections on N_k. We can define the action:

$$\Sigma_k \times O\Gamma^k \rightarrow O\Gamma^k$$
$$(\sigma, (u_1, ..., u_k)) \rightarrow (u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(k)}).$$

Then, we define general configuration spaces:

$$\Gamma^n = O\Gamma^n / \sum_n \quad \text{and} \quad \Gamma = \prod_{n \in N^*} \Gamma^n.$$

Finite configurations Γ are made of a countable disjoint union. We now fix a metric d on N. The idea of branched configurations is to glue together the components Γ^n on the "generalized diagonal", namely, we define the following distance on Γ:

Definition 1.1. *Let* $(u, v) \in \Gamma^2$. $d_\Gamma(u, v) = \sup_{(x,x')\in u\times v} \{d(x, v), d(x', u)\}$

d_Γ is a metric on Γ, which coincides with the restriction of the Hausdorff distance restricted to Γ. The following proposition traduces the change of topology of Γ into $B\Gamma$ by cut-and paste property:

Proposition 1.2. [8] $\forall n \in N^*, B\Gamma^{n+1} = \Gamma^{n+1} \coprod_{B\Gamma^n} B\Gamma^n$ *where the identification is made along the trace on* Γ^{n+1} *of the* d_Γ*–neighborhoods of* $B\Gamma^n$ *in* $N^{n+1} \supset O\Gamma^{n+1}$.

We now give a corrected version for the Frölicher structure on $B\Gamma$. For this, consider the massive finite k–set

$$MN_k = \left\{ ((u_1, m_1), ...(u_k, m_k)) \in \left(N \times R_+^*\right)^k \middle| \sum_{i \in N_k} m_i = 1. \right\}$$

The set $C^\infty(N, \mathrm{R})$ defines the set F_k on MN_k by

$$((u_1, m_1), ...(u_k, m_k)) \mapsto \sum_{i \in N_k} m_i f(u_i).$$

This set F_k can be identified with the natural Frölicher structure induced by the vague topology on the space of probabilities on N noted by $P(N)$ [4, 11]

restricted to the space MN_k understood as a subspace of $P(N)$.

By the canonical projections from MN_k to $B\Gamma_k$, the Frölicher structure generated by the family F_k projects to a diffeology on $B\Gamma_k$, compatible with the distance d_Γ. A

recent overview on diffeologies and Frölicher spaces and diffeologies can be found in [4]. For an example of non-trivial smooth map with values in $\mathrm{B}\Gamma_k$, we refer to [8].

2. BRANCHING OR NO-BRANCHINGS? TECHNICAL ASPECTS

We have described, till now, branching configurations which are set-theoretically isomorphic to classical finite configurations [3]. In the setting of finite configurations, the subsets Γ^n form a topological partition of Γ, in other words, two subsets Γ^n and Γ^m are disconnected topologcally and hence diffeologically.
In the diffeology of branching configurations, one can find a smooth path linking a 1-configuration to a well-chosen n configuration. Therefore, we can highlight few important technical features which vary between the two settings:

- the topology fo Γ is a topology of classical manifold [3]. Its algebraic topology is studied. Classical techniques from dynamics on manifolds are available.
- the topology of $\mathrm{B}\,\Gamma$ is a topology of generalized manifold called Diffeological space. It is not studied actually.

3. MULTIVALUED GAUGES AND BRANCHINGS

Let us now consider a trivial fiber bundle F with typical fiber N over the simplex Δ_n. By trivial constructions, there is a canonical trivial fiber bundle $\mathrm{B}F$ over Δ_n, with typical fiber $\mathrm{B}\,N$. Our model is only local (that is, over the contractible simplex Δ_n) and this property ensures the robustness of our vocabulary with respect to potential misleading terminology. Given G, a group acting faithfully and transitively on N, on
the one hand, there is a classical construction of the corresponding principal bundle $P(F, G) = F \times_G G$, see e.g. [6]. Therefore, G also acts on $\mathrm{B}N$ faithfully, but not transitively. The same action can be extended to $\mathrm{B}F = \Delta_n \times \mathrm{B}N$. On the other hand, as a fiber bundle over Δ_n, the
canonical structure group for $\mathrm{B}F$ is the diffeological group $Diff(\mathrm{B}F)$ which is actually not studied. Therefore, in order to fit with classical pictures of gauge-invariance, we prefer the following definition:

Definition 3.1. *We denote by* $B(\mathrm{B}F, G)$ *the (diffeological) quotient* $\mathrm{B}F/G$.

Since $\mathrm{B}N$ is a topological gluing of a simplicial complex, it is itself a

simplicial complex as well as $\mathrm{B}F$ and $B(\mathrm{B}F, G)$. *We now assume and for the rest of the paper that* $N = G$ *and that* G *is a regular diffeological Lie group.*
A *smooth multivalued* gauge is a smooth (global) section

$$B(\mathrm{B}F, G) \to \mathrm{B}F$$

or equivalently a $G-$equivariant map

$$\mathrm{B}F \to G.$$

We call by the fiber bundle of multivalued gauges the space $\mathrm{B}S(F)$ the space of smooth sections.
Within this picture, a smooth multivalued gauge restricts to a (classical) gauge trivially using the inclusion $F \hookrightarrow \mathrm{B}F$ and a gauge on F and reciprocally, a gauge on

F defines a smooth map from F to BG.

Proposition 3.2. *A smooth multivalued gauge always exist on* BF. *In other words,* B$S(F)\neq\emptyset$.

Proof. Since $F=\Delta_n \times G$ is trivial, there exists a classical gauge on it, that generates a multivalued gauge.

Clearly, there can exist multivalued gauges that are not deduced from a classical gauge. Passing now to discretizations, we have to consider a (fixed) triangulation τ of the simplicial complex $B($B$F, G)$.

Definition 3.3. *A discretized gauge with respect to* τ *is a map from* 0*-vertices of* τ *to* G.

4. MULTIVALUED CONNECTIONS

We can now propose *one* possible generalization of the notion of connection adapted to multivalued gauges as defined before.

Definition 4.1. *A connection on branchings on* F *is a connection on the* G*–principal bundle* B$F \rightarrow B$(BF, G).

We feel the need to precise here that the notion of connection relies on the setting of diffeologies since both BF and B(BF, G) are diffeological spaces. The reader who feels not fluent enough to deal with diffeologies can understand the notion of connection as a G equivariant 1-form in $\Omega^1(F, \mathrm{g})$.
Since G is regular, a connection 1-form generates horizontal paths, as it is proven in [12] for such a generalized setting. As a consequence, over the
edges of the triangulation τ defined before, horizontal paths can be produced up to a specific ordering of the 0 vertices of τ along the lines of the procedure described in [9] for triangulations of a classical manifold. Here the same procedure is adapted for the triangulation τ without any technical problem. Let us sketch the procedure directly generalized from [9].
The first key heuristic idea relies on the fact that $D_0 exp = Id$ on the Lie group G, which implies that, for "short" paths and on a prescribed local trivialization $D\times G$ of P over a star-shaped domain $D, l(\gamma)\theta_{\partial_t\gamma(0)} \approx \exp\theta_{\partial_t\gamma(t)}$. This approach is the way how loop quantum gravity (again, heuristically) produces a discretization of a connection, defining "holonomies along the 1-vertices" of a prescribed triangulation. Without more assumptions on gauges and basepoints, this approach is ill-defined, and only the holonomy of a loop, which corresponds to the notion of curvature, is (almost) rigorous.
The nodes of this triangulation are assumed indexed by N, noted by $(s_n)_{\mathrm{N}}$ (the manifold M can be non compact). Recall that, for a fixed index $i_1, \ldots i_n$, $St(s_{i1}, \ldots s_{in})$ is the domain described by the simplexes with nodes s_i. Fixing s_0 as a basepoint and $p_0 \in \pi^{-1}(s_0)$,

(1) Let $j = \min\{I \in N^* \mid s_i \in St(s_0)\}$. We define $g_{0,j} = 1$ and p_j the endpoint of the horizontal path over $[s_0, s_j]$ with starting point p_0. Let $I_2 = \{0; j\}$.

(2) Assume that I_n exists, and that,

- $\forall_i \in I_n$, we have constructed $p_i \in \pi^{-1}(s_i)$ and
- $\forall (i, j) \in I_n^2$, with $i < j$, $g_{i,j}$ is the holonomy of $[s_i, s_j]$, starting at p_i, i.e. $p_j.g_{i,j}$ is the endpoint of the horizontal path over $[s_i, s_j]$ with starting point p_i.

Let $j = \min \{i \in N - I_n | s_i \, St(s_k; k \in I_n)\}$. We define

- $k = \min \{i \in I_n | s_i \in St(s_j)$ and let p_j the endpoint of the horizontal path over $[s_i, s_j]$ starting at p_i.
- for $i \in I_n$, $g_{i,j}$ is defined such as $p_j.g_{i,j}$ is the endpoint of $[s_i, s_j]$ starting at p_i.
- $I_{n+1} = I_n \cup \{j\}$.

The discretization thus describes the holonomy of the connection along the 1-vertices. We have a first sequence $(p_n)_N$ which stands as a slice of the pull-back $((s_n)_N)^* P$ and if K^*_1 is the 1-skeleton of τ, the family $(g_{i,j})_{i<j}$, expresses holonomy elements of the connection θ on the vertices of K^*_1.

Within this picture, a 1-vertex on the triangulation τ is a multivalued path itself. A discretized connection on branchings is then well-defined, and this definition is coherent with our definition of multivalued gauge.

5.FEW EXISTING EXAMPLES

5.1.A toy example: evaluations by multiple experts.

The importance of multiple gauges for decision theory is certainly the most easy example to deal with, with the following example: one editor requires *n* reports about ten submitted papers, with the capacity to publish only four of them. The reviewers are asked to give a mark - say from 1 to 100 - for the paper (or the papers) under evaluation. Even if the editor decides to care only about the rating,

- The numerical marking given by each reviewer can differ, from one reviewer to another, from the qualitative (fuzzy) appreciation of each work, see [14]. In other words, the scale for a good paper can differ from one expert to another.
- if multiple reviewers produce two simultaneous reports about two papers, the ranking of the papers can differ from one reviewer to another.

Therefore, as a raw data set of markings of one paper by *n* reviewers, we get an element in $[1, 100]^n$, which is not exactly a n-gauge since we can get the same mark for the same paper by two different reviewers. Within this basic picture, the marking is only a random variable, that can be treated by standard techniques. But basic psychology tells us that a reviewer with multiple evaluations will naturally express his preferences by choosing different marks for each paper, defining intrisically a ranking. The same way, the editor will do so by reading the reports. Therefore, there will be naturally comparisons between the ten papers, that no longer demand on the marking in second evaluation, namely, an element of

$$B(\mathrm{B}(\Delta_{10} \times [1, 100]), Diff_+[1, 100])$$

where $Dif\ f_+[1, 100]$ is the group of orientation preserving diffeomorphisms of [1, 100]. In this context, branchings are not necessary.

5.2. Twists in information physics.

The evaluation by experts or reviewers is a simple model for information physics, where one is gathering systems that exchange informations. Within this large picture, rankings are
interpreted as a specific case of global gauge, and one gets multivalued values (in fact multivalues in $\{0, 1\}$). A concept that enables passing from multivalues to classical values is contextuality. It consist in separating different collections of observables that are jointly commensurable into distinct measurement contexts. Each such context thus represents a logically consistent scenario (or ?reality?) in which all the associated observables can have simultaneous and thus well-defined values. Switching the context corresponds to replacing some of the observables, thus making a new choice of the ones that are to be considered, and we are interested in models in which there is a reasonable local compatibility between contexts in order to allow for consistent context switching in the context of game theory and quantum computing. We refer to [2] for a comprehensive presentation.

5.3. Various approaches to double geometries: double field theory, T- duality.

Following the paper [5] which stands at a key step of the development of theories envolving double geometry (or geometries) in high energy physics, a double geometry on a vector bundle V over a base X is

- either given by the vector bundle $V \oplus V$ over X, that is a bundle of 2-configurations in B $\Gamma^2(V_x)$ that fiber over $x \in X$,
- or given by B $\Gamma^2(V)$.

In these settings, the interwinning of the two points may carry a fundamental role, first in terms of symmetries of the theory, second in terms of non-triviality of the underlying geometry. A project in progress intends to interpret some of the physical quantities in double theories ad T-duality (see e.g. [1]) in terms of BΓ2−branching.

REFERENCES

1. Andriot, D.; Non-geometric fluxes versus (non)-geometry. In: Donagi, Ron (ed.) et al., String-Math 2012. Proceedings of the conference, Universität Bonn, Bonn, Germany, July 16?21, 2012. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **90**, 213-225 (2015)
2. Ellingsen, A.; Lundholm, D.; Magnot, J-P.; “The six blind men and the elephant”: an interdisciplinary selection of measurement features. in: Kielanowski, Piotr (ed.) et al., Geometric methods in physics XL, workshop, Bialowieza, Poland, June 20?25, 2023. Cham: Birkhäuser. *Trends Math.*, 275-307 (2024).
3. Fadell, E.R.; Husseini, S.Y.; *Geometry and topology of configuration spaces* Springer, Berlin (2001)

4. Goldammer, N.; Magnot, J-P.; Welker, K.; On diffeologies from infinite dimensional geometry to PDE constrained optimization *Contemporary Mathematics* **794**, 1–48 (2024).
5. Hull, C.; Doubled geometry and T-folds. *J. High Energy Phys.* **2007**, no 7, 080 (2007)
6. Kriegl, A.; Michor, P.W.; *The convenient setting for global analysis.* Math. surveys and monographs **53**, American Mathematical society, Providence, USA. (2000).
7. McOrist, J.; Morrison, D.; Sethi S.; Geometries, non-geometries, and fluxes. *Adv. Theor. Math. Phys.* **14** 1515?1583 (2010)
8. Magnot, J-P.; From Configurations to Branched Configurations and Beyond. *Research and Reports in Mathematics* **1** no 1, art. ID 1000105 (2017).
9. Magnot, J-P.; Remarks on a new possible discretization scheme for gauge theories. *Int. J. Theor. Phys.* **57** no. 7, 2093-2102 (2018).
10. Magnot, J-P.; A mathematical bridge between discretized gauge theories in quantum physics and approximate reasoning in pairwise comparisons *Adv. Math. Phys.* **2018**, Article ID 7496762, 5 pages (2018).
11. Magnot, J-P.; On mathematical structures on pairwise comparisons matrices with coefficients in a group arising from quantum gravity *Helyion* **5** e01821 (2019)
12. Magnot, J-P.; On diffeological principal bundles of non-formal pseudo-
13. differential operators over formal ones. Proc. Int. Geom. Cent. 16 no. 2, 125-141 (2023).
14. Magnot, J-P.; On random pairwise comparisons and their geometry. J. Appl. Anal. In press.
15. Mazurek, J.; Perez Rico, C.; Fernandez, C.; Magnot, J-P.; Magnot, T.; The 5-Item Likert Scale and Percentage Scale Correspondence with Implications for the Use of Models with (Fuzzy) Linguistic Variables. Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration Volume 31 3-16 (June 2021)
16. Rovelli, C.; Vidotto, F.; Covariant loop quantum gravity Cambridge university press (2014).

Jean-Pierre Magnot
LAREMA, Université d'Angers et Lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand, France
e-mail: jp.magnot@gmail.com

БАГАТОЗНАЧНІ ПАРНІ ПОРІВНЯННЯ ВІД ФІЗИКИ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЙ ТА ТЕОРІЇ КАЛІБРУВАННЯ ДО ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Тут ми розширюємо математичне налаштування для попарних порівнянь на кілька значень. Представлено геометрію таких об'єктів і наведено зв'язок з існуючими теоріями.
Ключові слова: попарні порівняння, фізика інформації, теорія прийняття рішень. MSC (2020): 90B99, 81T13

Valery Dvoeglazov
UAF, Universidad de Zacatecas
Apartado Postal 636, Suc. 3 Zacatecas 98061, Zac., Me´xico
e-mail: valeri@fisica.uaz.edu.mx

NEGATIVE-ENERGY AND TACHYONIC SOLUTIONS IN THE WEINBERG-TUCKER-HAMMER EQUATION FOR SPIN 1

We considered Weinberg-like equations in the article [1] in order to construct the Feynman-Dyson propagator for the spin-1 particles. This construction is based on the concept of the Weinberg field as a system of four field functions differing by parity and by dual transformations. We also analyzed the recent controversy in the definitions of the Feynman-Dyson propagator for the field operator containing the S = 1/2 self/anti-self charge conjugate states in the papers by D. Ahluwalia et al [2] and by W. Rodrigues Jr. et al [3, 4]. The solution to this mathematical controversy is obvious. I proposed the necessary doubling of the Fock Space (as in the Barut and Ziino works), thus extending the corresponding Clifford Algebra. However, the logical interrelations of different mathematical foundations with physical interpretations are not so obvious. In this work we present some insights with respect to this for spin 1/2 and 1. Meanwhile, the N. Debergh et al article considered our old ideas of doubling the Dirac equation, and other forms of T- and PT-conjugation [5]. Both algebraic equation Det(p̂ − m) = 0 and D√et (p̂ + m) = 0 for u− and v− 4-spinors have solutions with p0 = ±Ep = ± $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. The same is true for higher –spin equations (or they may even have more complicated dispersion relations). Mean- while, every book considers the equality p0 = Ep for both u and v spinors of the (1/2, 0) (0, 1/2)) representation only, thus applying the Dirac-Feynman-Stueckelberg procedure for elimination of negative-energy solutions. The Fock space can be doubled on the quantum-field (QFT) level. In this article we give additional bases for the development of the correct theory of higher spin particles in QFT. It seems, that it is impossible to consider the relativistic quantum mechanics appropriately without negative energies, tachyons and appropriate forms of the discrete symmetries, and their actions on the corresponding physical states.

1 Introduction.

The algebric equations $Det(\hat{p} - m) = 0$ and $Det(\hat{p} + m) = 0$ for u− and v− 4-spinors have solutions with $p_0 = \pm E_p = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

The recent problems of superluminal neutrinos, negative-mass squared neutrinos, various schemes of oscillations including sterile neutrinos, re- quire attention. The problem of the lepton mass splitting (e, μ, τ) has long history. This suggests that something missed in the foundations of relativistic quantum theories. Modifications seem to be necessary in the Dirac sea concept, and in the even more sophisticated Stueckelberg concept of the backward propagation in time. The Dirac sea concept is intrinsically related to the Pauli principle. However, the Pauli principle is intrinsically related to the Fermi statistics and the anticommutation relations of fermions. Recently, the concept of the *bi-orthonormality* has been proposed; the (anti) commutation relations and statistics are assumed to be different for *neutral* particles [6]. We propose the relevant modifications in the basics of the relativistic quantum theory below.Next, Sakharov in 1967, Ref. [7], introduced the idea of two universes with opposite arrows of time, born from the same initial singularity (i.e.Big Bang). Next, the authors of [5] constructed (within the framework of the present-day quantum field theory) negative-energy fields for spin-1/2 fermions. Currently, the predominating consensus is existence of the dark matter (DM) and the dark energy (DE) paradigm. Numerous possible candidates

have been proposed for the DM, but to the date, searchfor these candidates was not successful. "There is growing favor with the idea that new ideas need to be considered until an answer is found.""A paradigm shift that allows the serious consideration of negative massis a real possibility." However, see [8] on the relation of inertial and gravitational masses.
The paper is composed in the following way: Introduction, General Frameworks, Negative-energy and Tachyonic Solutions for the spin 1, and Conclusions. In the main text the Dirac spinor formalism is given.

2. The General Frameworks.

The Dirac formalism with negative energies.

The Dirac equation is:

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m]\Psi(x) = 0\,. \tag{1}$$

The γ^{μ} are the Clifford algebra matrices, ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$):

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}\,, \tag{2}$$

$g^{\mu\nu}$ is the metrics of the Minkowski space. Usually, everybody uses the following definition of the field operator [9, 10] in the pseudo-Euclidean metrics:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_h \int \frac{d^3p}{2E_p}\left[u_h(\mathbf{p})a_h(p)e^{-ip\cdot x} + v_h(\mathbf{p})b_h^{+}(\mathbf{p})e^{+ip\cdot x}\right], \tag{3}$$

as given *ab initio*. After actions of the Dirac operator at $\exp(\pm ip_{\mu}x^{\mu})$the 4-spinors (u and v) satisfy the momentum-space equations: $(\hat{p} - m)u_h(p) = 0$ and $(\hat{p} + m)v_h(p) = 0$, respectively; h
is the polarization index. It is easy to prove from the characteristic equations $Det(\hat{p} \mp m) = (p^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^2 = 0$ that the solutions should satisfy the energy-momentum relation $p_0 = \pm E_p = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

The general scheme of construction of the field operator has been presented in [11]. In the case of the $(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)$ representation we have:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\delta\left(p^2 - m^2\right)e^{-ip\cdot x}\Psi(p) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_h \int d^4p\,\delta\left(p_0^2 - E_p^2\right)e^{-ip\cdot x}u_h(p_0,\mathbf{p})a_h(p_0,\mathbf{p}) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{2E_p}\left[\delta\left(p_0 - E_p\right)\delta\left(p_0 + E_p\right)\right] \\
&\left[\theta(p_0) + \theta(-p_0)\right]e^{-ip\cdot x}\sum_h u_h(p)a_h(p) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_h \int d^4p/2E_p\left[\delta\left(p_0 - E_p\right) + \delta\left(p_0 + E_p\right)\right] \\
&\left[\theta(p_0)u_h(p)a_h(p)e^{-ip\cdot x} + \theta(p_0)u_h(-p)a_h(-p)e^{+ip\cdot x}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_h \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_p}\theta(p_0)$$

$$\left[u_h(p)a_h(p)\Big|_{p_0=E_p} e^{-i(E_p\mathbf{t}-\mathbf{px})} + u_h(-p)a_h(-p)\Big|_{p_0=E_p} e^{+i(E_p\mathbf{t}-\mathbf{px})}\right],$$

where a_h, $b_h^\dagger$ are the annihilation/creation operators, and in the textbook cases

$$u_h(p)\begin{pmatrix}\exp(+\boldsymbol{\sigma}\cdot\varphi)\phi_R^h(\mathbf{0})\\ \exp(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\varphi)\phi_R^h(\mathbf{0})\end{pmatrix} \tag{5}$$

*cosh(φ) = E_p/m, sinh(φ) = **p** /m*. During the calculations above we had to represent 1 = θ(p0) + θ(p0) in order to get positive- and negative-frequency parts [12]. Moreover, during these calculations we did not yet assume, which equation this field operator (namely, the u spinor) satisfies, with negative- or positive- mass?[8] In general, we shouldtransform u_h(p) to the v(p). The procedure is the following one [13].In the Dirac case we should assume the following relation in the field operator:

$$\sum_h v_h(p)b_h^+(p) = \sum_h u_h(-p)a_h(-p). \tag{6}$$

We need $\Lambda_{\mu\lambda}$(p) = $\bar{v}_\mu$(p)u_λ(−p). By direct calculations, we find

$$-mb_\mu^+(p) = \sum_\lambda \Lambda_{\mu\lambda}(p)a_\lambda(-p). \tag{7}$$

Hence, $\Lambda_{\mu\lambda} = -\mathrm{im}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})_{\mu\lambda}$, **n** = **p**/|**p**|, and

$$-b_\mu^+(p) = i\sum_\lambda (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})_{\mu\lambda}a_\lambda(-p). \tag{8}$$

Multiplying (6) by $\bar{u}_\mu$(−p) we obtain

$$a_\mu(-p) = -i\sum_\lambda (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})_{\mu\lambda}b_\lambda^\dagger(p). \tag{9}$$

The equations are self-consistent. In the (1, 0) ⊕ (0, 1) representation thesimilar procedure leads to the different situation:

$$a_\mu(\mathrm{p}) = [1 - 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^2]_{\mu\lambda}a_\lambda(-\mathrm{p}). \tag{10}$$

This signifies that in order to construct the Sankaranarayanan-Good field operator [35], it satisfies $[\gamma_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \ \frac{(i\partial/\partial t)}{}\mathrm{m}^2]\Psi(\mathrm{x}) = 0$, we need additional postulates. For instance, one can try to construct the left- and the right-hand side of the field operator separately each other [12].

We have, in fact, $u_h(E_p, \mathbf{p})$ and u_h(- E_p, **p**) originally, which satisfy the equations:

$$E_p(\pm\gamma^0) - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - \mathrm{m}\ \ u_h(\pm E_p, \mathbf{p}) = 0\,. \tag{11}$$

Due to the properties $U^\dagger\gamma^0 U$ = - γ^0, $U^\dagger\gamma^i U$ = +γ^i with the unitarymatrix

$$U = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -\gamma^0\gamma^5 \tag{12}$$

in the Weyl basis,[2] we have in the negative-energy case:

$$E_p\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - \mathrm{m}\ \ U^\dagger u_h(-E_p, \mathbf{p}) = 0\,. \tag{13}$$

[8] Moreover, since bispinors are, in general, complex-valued, we can even use the different basis such as u_α = *column* (*i* 0 0 0) etc. instead of the well-accustomed one.

Thus, unless the unitary transformations do not change the physical con-tent, we have that the negative-energy spinors $\gamma^5\gamma^0 u(E_p, \mathbf{p})$ (see (13)) satisfy the accustomed "positive-energy" Dirac equation. Their explicates forms $\gamma^5\gamma^0 u(E_p, \mathbf{p})$ are different from the textbook "positive-energy" Dirac spinors. From the first sight (just $E_p \to -E_p$) they are the follow- ing ones:

$$\bar{u}(p) = \frac{N}{\sqrt{2m(-E_p+m)}} \begin{pmatrix} -p^+ + m \\ -p_r \\ p^- - m \\ -p_r \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\tilde{\bar{u}}(p) = \frac{N}{\sqrt{2m(-E_p+m)}} \begin{pmatrix} -p_l \\ -p^- + m \\ -p_l \\ p^+ - m \end{pmatrix}, \tag{15}$$

We use tildes because we do not yet know their polarization properties. It is not even clear, which helicity operator, $\sigma_3/2$ or $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})/2$, or some other should be used after T − conjugation [5]. Next,

$$E_p = \sqrt{p^2 + m^2} > 0,\ p_0 = \pm E_p,\ p^{\pm} = E_p \pm p_z,\ p_{r,l} = p_x \pm i p_y. \tag{16}$$

What about the $\tilde{v}(p) = \gamma^0 u$ transformed with the γ_0 matrix? They are not equal to the previous "negative-energy" 4-spinors $v_h(p) = \gamma^5 u_h(p)$? Obviously, they also do not have well-known forms of the usual v spinors in the Weyl basis, differing by phase factor and in the sign at the mass term. The normalizations of these 4-spinors are to $(\pm 2N^9)$. One can prove that the matrix

$$P = e^{i\theta}\gamma^0 = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1_{2x2} \\ 1_{2x2} & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

can be used in the parity operator as well as in the original Weyl basis. However, if we would take the phase factor to be zero we obtain that while $u_h(p)$ have the eigenvalue +1, but after space inversion operation ($R = (\mathbf{x} \to -\mathbf{x}, \mathbf{p} \to -\mathbf{p})$)

$$P R \tilde{u}(p) = P R \gamma^5\gamma^0 u_{\uparrow}(-E_p, \mathbf{p}) = -\tilde{u}(p), \tag{18}$$

$$P R \tilde{u}(p) = P R \gamma^5\gamma^0 u_{\downarrow}(-E_p, \mathbf{p}) = -\tilde{u}(p). \tag{19}$$

Perhaps, one should choose the phase factor $\theta = \pi$. Thus, we again con- firmed that the relative (particle-antiparticle) intrinsic parity has physical significance only.

Similar formulations have been presented in Refs. [14], and [15]. The group-theoretical basis for such doubling has been given in the papers by Gelfand, Tsetlin and Sokolik [16], who first presented the theory in the 2- dimensional representation of the inversion group in 1956 (later called as "the Bargmann-Wightman-Wigner-type quantum field theory" in 1993). M. Markov wrote long ago *two* Dirac equations with the opposite signs at the mass term [14].

$$[i\gamma\mu\partial\mu - m]\,\Psi 1(x) = 0, \tag{20}$$

[9] The properties of the $U-$ matrix are opposite to those of $P^{\dagger}\gamma^0 P = +\gamma^0$, $P^{\dagger}\gamma^i P = -\gamma^i$ with usual the $P = \gamma^0$, thus giving $\left[-E_p\gamma^0 + \gamma\cdot\mathbf{p} - m\right]P u_h(-E_p, \mathbf{p}) = -[\hat{p} + m]\bar{v}_?(p) = 0$. While, the relations of the spinors $v_h(E_p, \mathbf{p}) = \gamma_5 u_h(E_p, \mathbf{p})$ are well-known, it seems that the relations of the *v*-spinors of the positive energy to *u*— spinors of the negative energy are frequently forgotten, $\bar{v}_?(p) = \gamma^0 u_h(-E_p, p)$.

$$[i\gamma\mu\partial\mu + m]\,\Psi 2(x) = 0\,. \tag{21}$$

In fact, he studied all properties of this relativistic quantum model (while he did not know yet the quantum field theory in 1937). Next, he added and subtracted these equations:

$$i\gamma\mu\partial\mu\varphi(x) - m\chi(x) = 0\,, \tag{22}$$
$$i\gamma\mu\partial\mu\chi(x) - m\varphi(x) = 0\,. \tag{23}$$

Thus, φ and χ solutions can be presented as some superpositions of the Dirac 4-spinors u and v These equations, of course, can be identified with the equations for the Majorana-like λ and ρ, which we presented in Ref. [17] on the basis of postulates [18].

The four-component Majorana-like spinors are

$$\lambda(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \upsilon\theta\phi_L^*(p) \\ \phi_L(P) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\theta_{[1/2]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

They become eigenspinors of the charge conjugation operator S_c with eigenvalues ±1 if the phase ϑ is set to ± *i*:

$$S_c\lambda(\mathbf{p})\big|_{\upsilon=\pm i} = \pm\lambda(\mathbf{p})\big|_{\upsilon=\pm i}. \tag{26}$$

In a similar way one can construct ρ spinors on using ϕ_R.

Of course, the signs at the mass terms depend on, how do we associate the positive- or negative- frequency solutions with λ and ρ:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\lambda^S(x) - m\rho^A(x) = 0\,, \tag{27}$$
$$i\gamma^\mu\partial_\mu\rho^A(x) - m\lambda^S(x) = 0\,, \tag{28}$$
$$i\gamma^\mu\partial_\mu\lambda^A(x) + m\rho^S(x) = 0\,, \tag{29}$$
$$i\gamma^\mu\partial_\mu\rho^S(x) + m\lambda^A(x) = 0\,. \tag{30}$$

Neither of them can be regarded as the Dirac equation. However, theycan be written in the 8-component form as follows:

$$[i\Gamma^\mu\partial_\mu - m]\,\Psi(x) = 0\,, \tag{31}$$

$$[i\Gamma^\mu\partial_\mu + m]\,\Psi(x)_{(-)}^{(+)} = 0\,, \tag{32}$$

with

$$\Psi_{(+)}(x) = \begin{pmatrix} \rho^A(x) \\ \Lambda^S(x) \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{(-)}(x) = \begin{pmatrix} \rho^s(x) \\ \Lambda^A(x) \end{pmatrix} \text{ and } I^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

It is easy to find the corresponding projection operators, and the Feynman-Stueckelberg propagator.

The connection with the Dirac spinors has been found [17, 19]. Forinstance,

$$\begin{pmatrix} \lambda_\uparrow^s(p) \\ \lambda_\downarrow^s(p) \\ \lambda_\uparrow^A(p) \\ \lambda_\downarrow^A(p) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & -1 & i \\ -i & 1 & -i & -1 \\ 1 & -i & -1 & -i \\ i & 1 & i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{+1/2}(p) \\ u_{-1/2}(p) \\ v_{+1/2}(p) \\ v_{-1/2}(p) \end{pmatrix}, \tag{34}$$

provided that the 4-spinors have the same physical dimension. Thus, wecan see that the two 4-spinor systems are connected by unitary trans- formations, and this represents itself rotations of the spin-parity basis. However, it is usually assumed that the λ− and ρ− spinors describe the neutral particles, meanwhile u and v spinors describe the charged particles. Kirchbach *et al.* [19] found the amplitudes for neutrinoless double beta decay (00νβ) in this scheme. It is obvious from (34) that there are some additional terms comparing with the

standard formulation.

One can also re-write the above equations into the two-component forms. Thus, one obtains the Feynman-Gell-Mann [20] equations.

Barut and Ziino [15] proposed yet another model. They considered γ^5 operator as the operator of the charge conjugation. Thus, the charge-conjugated Dirac equation has the different sign comparing with the ordinary formulation:

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} \_ m\right]\Psi^{c}_{BZ} = 0, \tag{35}$$

and the so-defined charge conjugation applies to the whole system, fermion+electromagnetic field, $e \to -e$ in the covariant derivative. The superpositions of the Ψ_{BZ} and Ψ^{c} also give us the "doubled Dirac equation", as the equations for λ and ρ spinors. The concept of the doublings of the Fock space has been developed in the Ziino works (cf. [16, 21]) in the framework of the quantum field theory. In their case the charge conjugate states are simultaneously the eigenstates of the chi-rality. Next, it is interesting to note that for the Majorana-like field operators

$$\nu^{ML}\left(x_{\mu}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)_3}\frac{1}{2E_p}\sum_{\eta}\left[\lambda^{S}_{\eta}\left(p^{\mu}\right)a_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{-ip\cdot x} + \lambda^{A}_{\eta}\left(p^{\mu}\right)a^{+}_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{+ip\cdot x}\right]. \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\left[\nu^{ML}\left(x^{\mu}\right) + C\nu^{ML+}\left(x^{\mu}\right)\right]/2 = &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{\eta}\left[\begin{pmatrix} i\Theta\phi^{*\eta}_{L}\left(p^{\mu}\right) \\ 0 \end{pmatrix}a_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{-ip\cdot x} + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{\eta}_{L}\left(p^{\mu}\right) \end{pmatrix}a^{+}_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{ip\cdot x}\right], \\ \left[\nu^{ML}\left(x^{\mu}\right) - C\nu^{ML+}\left(x^{\mu}\right)\right]/2 = & \\ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{\eta}&\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{\eta}_{L}\left(p^{\mu}\right) \end{pmatrix}a_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{-ip\cdot x} + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} -i\Theta\phi^{*}_{L}\eta\left(p^{\mu}\right) \\ 0 \end{pmatrix}a^{+}_{\eta}\left(p^{\mu}\right)e^{ip\cdot x}\right],\end{aligned} \tag{37}$$

which, thus, naturally lead to the Ziino-Barut scheme of massive chi- ral fields, Ref. [15]. Next, the relevant paper is Ref. [22]. It is obvious to merge u(**p**) and v(**p**) spinors in one doublet of "positive energy" and v(**p**) and u(**p**) spinors, in another doublet of "negative energy" ,as Markov and Fabbri did. However, the point of my paper is that both u(p_0, **p**) and v(p_0, **p**) contains contributions to both positive- and negative- energies, cf. [23].

2.2 The Feynman-Dyson propagators for neutral particles (locality or non-locality?)

We study the problem of construction of causal propagators in both higher-spin theories and the spin S = 1/2 Majorana-like theory. The hypothesis is: in order to construct the analogues of the Feynman-Dysonpropagator we need actually four field operators connected by the dual and parity transformation. We use the standard methods of quantum field theory. So, the number of components in the causal propagators isenlarged accordingly. The conclusion is discussed in the last Section:if we would not enlarge the number of components in the fields (in the propagator) we would not be able to obtain the causal propagator.

Accordingly to the Feynman-Dyson-Stueckelberg ideas, a causal propagator S_F has to be constructed on using the formula (*e.g.*, Ref. [10, p.91])

$$S_{F}\left(x_2, x_1\right) = \sum_{\sigma}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_p}$$
$$\times\left[\theta\left(t_2 - t_1\right)au^{\sigma}\left(p\right)\bar{u}^{\sigma}\left(p\right)e^{-ip\cdot x}\right.$$

$$+\theta(t_1-t_2)bv^{\sigma}(p)\bar{v}^{\sigma}(p)e^{-ip\cdot x}\ ], \tag{38}$$

where $x = x_2 - x_1$, m is the particle mass, $p^{\mu} = (E_p, \mathbf{p})$, u^{σ}, v^{σ} are the 4-spinors, $\theta(t)$ is the Heaviside function. In the spin S = 1/2 Diractheory, it results in

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}, \tag{39}$$

rovided that the constants a and b are determined by imposing

$$(i\hat{\partial}_2 - m)S_F(x_2, x_1) = \delta^{(4)}(x_2 - x_1), \tag{40}$$

namely, a =-b = 1/i; $\partial_2 = \partial/\partial x_2$, ϵ defines the rules of work near the poles.

However, attempts to construct the covariant propagator in this way have failed in the framework of the Weinberg theory, Ref. [24], which isa generalization of the Dirac ideas to higher spins. For instance, on the page B1324 of Ref. [24] Weinberg writes:

"*Unfortunately, the propagator arising from Wick's theorem is NOT equal to the covariant propagator except for* S = 0 *and* S = 1/2. *Thetrouble is that the derivatives act on the* $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ *in* $\Delta^C(x)$*as well as on the functions*[10] Δ *and* Δ_1. *This gives rise to extra terms proportional to equal-time* δ *functions and their derivatives. . . The cureis well known: . . . compute the vertex factors using only the originalcovariant part of the Hamiltonian H ; do not use the Wick propagator for internal lines; instead use the covariant propagator.*

The propagator proposed in Ref. [25] is the causal propagator. How-ever, the old problem remains: the Feynman-Dyson propagator is not the Green function of the Weinberg equation. As mentioned, the covari-ant propagator proposed by Weinberg propagates kinematically spurioussolutions [25].

The aim of this subsection is to consider the problem of constructingthe propagator in the framework of the model given in [26]. The conceptof the Weinberg field *doubles* has been proposed there. It is based on the equivalence between the Weinberg field and the antisymmetric tensor field, which can be described by both $F_{\mu\nu}$ and its dual $\tilde{F}_{\mu\nu}$. These field functions may be used to form a parity doublet. An essential ingredient of my consideration is the idea of combining the Lorentz and the dual transformation. For the functions $\psi^{(1)}$ and $\psi^{(1)}$, connected with the first one by the dual (chiral, $\gamma_5 = diag\,(1_{3x3}),-1_{3x3})$) transformation, theequations are[11]

$$\left(\gamma_{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} + m^2\right)\Psi_1^{(1)} = 0, \tag{41}$$

$$\left(\gamma_{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} - m^2\right)\Psi_2^{(1)} = 0, \tag{42}$$

with $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. For the field functions connected with $\Psi_1^{(1)}$ and $\Psi_2^{(1)}$ by the $\gamma_5\gamma_{44}$ transformations the set of equations is written:

$$\left[\tilde{\gamma}_{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} - m^2\right]\psi_1^{(2)} = 0, \tag{43}$$

$$\left[\tilde{\gamma}_{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} + m^2\right]\psi_2^{(2)} = 0, \tag{44}$$

where $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{44}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{44}$ is connected with the S = 1 Barut-Muzinich-Williams $\gamma_{\mu\nu}$ matrices [27, 28]. In the cited paper I have used the plane-wave expansion. The corresponding 'bispinors' in the momentum spacecoincide with the Tucker-Hammer ones within a

[10] In the cited paper $\Delta_1(x) \equiv i\,[\Delta_+(x) + \Delta_+(-x)]$ and $\Delta(x) \equiv \Delta_+(x) - \Delta_+(-x)$ have been used. $i\Delta_+(x) \equiv 1/(2\pi)^3 \int (d^3p/2E_p)\exp(ipx)$ is the particle Green function.

[11] I have to use the Euclidean metrics here in order a reader to be able to compare the formalism withthe classical cited works. In the next Sections we turn to the pseudo-Euclidean metrics on using simple correspondence rules.

normalization. [12] Their explicit forms are

$$u_1^{\sigma(1)}(\mathbf{p}) = v_1^{\sigma(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left[m + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \\ \left[m - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \end{pmatrix} \tag{45}$$

and

$$u_2^{\sigma(1)}(\mathbf{p}) = v_2^{\sigma(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left[m + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \\ \left[-m - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \end{pmatrix}, \tag{46}$$

where ξ_σ are the 3-component objects (the analogs of the Weyl spinors).Thus, $u^{(1)}(\mathbf{p}) = \gamma_5 u^{(1)}(\mathbf{p})$ and $\bar{u}_2^{(1)}(\mathbf{p}) = -\bar{u}_1^{(1)}(\mathbf{p})\gamma_5$. The bispinors

$$u_1^{\sigma(2)}(\mathbf{p}) = v_1^{\sigma(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left[m + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \\ \left[-m - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$u_2^{\sigma(2)}(\mathbf{p}) = v_2^{\sigma(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left[-m + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \\ \left[-m - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)}\right]\xi_\sigma \end{pmatrix} \tag{48}$$

satisfy Eqs. (43) and (44) written in the momentum space. Thus,
$u_1^{(2)}(\mathbf{p}) = \gamma_5\gamma_{44}u_1^{(1)}(\mathbf{p}), \bar{u}_1^{(2)} = \bar{u}_1^{(1)}\gamma_5\gamma_{44}, u_2^{(2)}(\mathbf{p}) = \gamma_5\gamma_{44}, u_2^{(1)}(\mathbf{p})$ and $\bar{u}_2^{(2)}(p) = -\bar{u}_1^{(1)}\gamma_{44}$.
Let me check, if the sum of four equations

$$\begin{aligned} &\left[\gamma_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right]\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[\theta(t_2-t_1)au_1^{\sigma(1)}(p)\bar{u}_1^{\sigma(1)}(p)e^{ip\cdot x} + \theta(t_1-t_2)bv_1^{\sigma(1)}(p)\bar{v}_1^{\sigma(1)}(p)e^{-ip\cdot x}\right] \\ &\left[\gamma_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right]\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[\theta(t_2-t_1)au_2^{\sigma(1)}(p)\bar{u}_2^{\sigma(1)}e^{ip\cdot x} + \theta(t_1-t_2)bv_2^{\sigma(1)}(p)\bar{v}_2^{\sigma(1)}e^{-ip\cdot x}\right] \\ &\left[\tilde{\gamma}_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + +m^2\right]\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[\theta(t_2-t_1)au_1^{\sigma(2)}(p)\bar{u}_1^{\sigma(2)}e^{ip\cdot x} + \theta(t_1-t_2)bv_1^{\sigma(2)}(p)\bar{v}_1^{\sigma(2)}e^{-ip\cdot x}\right] \\ &\left[\gamma_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right]\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[\theta(t_2-t_1)au_2^{\sigma(1)}(p)\bar{u}_2^{\sigma(1)}e^{ip\cdot x} + \theta(t_1-t_2)bv_2^{\sigma(1)}(p)\bar{v}_2^{\sigma(1)}e^{-ip\cdot x}\right] \\ &= \delta^{(4)}(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{49}$$

can be satisfied by the definite choice of *a* and *b*. The relation $u_i(p) = v_i(p)$ for bispinors in the momentum space had been used in Ref. [26]. Inthe process of calculations I assume that the 3-“spinors” are normalizedto $\delta_{\sigma\sigma'}$. The simple calculations give

$$\partial_\mu\partial_\nu\left[a\theta(t_2-t_1)e^{ip\cdot(x_2-x_1)} + b\theta(t_1-t_2)e^{-ip\cdot(x_2-x_1)}\right] =$$

$$-\left[ap_\mu p_\gamma\theta(t_2-t_1)e^{ip\cdot(x_2-x_1)} + bp_\mu p_\gamma\theta(t_1-t_2)e^{-ip\cdot(x_2-x_1)}\right]$$

$$+a\left[-\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta'(t_2-t_1) + i(p_\mu\delta_{\nu 4} + p_\nu\delta_{\mu 4})\delta(t_2-t_1)\right]$$

[12] They also coincide with the Ahluwalia *et al.* ones within a unitary transformation [2].

$$\exp\left[ip\left(x_2-x_1\right)\right]+b\left[\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta'\left(t_2-t_1\right)+i\left(p_\mu\delta_{\nu 4}+p_\nu\delta_{\mu 4}\right)\delta\left(t_2-t_1\right)\right]\exp\left[-ip\left(x_2-x_1\right)\right];$$

and

$$u_1^{(1)}\bar{u}_1^{(1)}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} m^2 & S_p\otimes S_p \\ S_p\otimes S_p & m^2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$u_2^{(1)}\bar{u}_2^{(1)}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -m^2 & S_p\otimes S_p \\ S_p\otimes S_p & -m^2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$u_1^{(2)}\bar{u}_1^{(2)}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -m^2 & S_p\otimes S_p \\ S_p\otimes S_p & -m^2 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$u_2^{(2)}\bar{u}_2^{(2)}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} m^2 & S_p\otimes S_p \\ S_p\otimes S_p & m^2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

where

$$S_p=m+\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\right)+\tfrac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{E+m}, \tag{54}$$

$$\bar{S}_p=m-\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\right)+\tfrac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{E+m}, \tag{55}$$

are the Lorentz boost matrices. Due to

$$[\mathrm{E}_p-(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})]\,\mathrm{S}_p\otimes\mathrm{S}_p=\mathrm{m}^2\,[\mathrm{E}_p+(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})]\ , \tag{56}$$

$$[\mathrm{E}_p+(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})]\,\mathrm{S}_p\otimes\mathrm{S}_p=\mathrm{m}^{\bar{2}}\,[\mathrm{E}_p\,\bar{-}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})]\ , \tag{57}$$

one can conclude: the generalization of the notion of causal propagatorsis admitted by using the Wick-like formula for the time-ordered particleoperators provided that a = b = 1/4im^2. It is necessary to consider all four equations, Eqs. (41)-(44). Obviously, this is related to the 12- component formalism, which I presented in [26].

The S = 1 analogues of the formula (39) for the Weinberg propagators follow immediately. In the Euclidean metrics they are:

$$S_F^{(1)}(p)\sim-\tfrac{1}{i(2\pi)^4\left(p^2+m^2-i\varepsilon\right)}\left[\gamma_{\mu\nu}p_\mu p_\nu-m^2\right], \tag{58}$$

$$S_F^{(2)}(p)\sim-\tfrac{1}{i(2\pi)^4\left(p^2+m^2-i\varepsilon\right)}\left[\gamma_{\mu\nu}p_\mu p_\nu+m^2\right], \tag{59}$$

$$S_F^{(3)}(p)\sim-\tfrac{1}{i(2\pi)^4\left(p^2m^2-i\varepsilon\right)}\left[\tilde{\gamma}_{\mu\nu}p_\mu p_\nu+m^2\right], \tag{60}$$

$$S_F^{(4)}(p)\sim-\tfrac{1}{i(2\pi)^4\left(p^2+m^2-i\varepsilon\right)}\left[\tilde{\gamma}_{\mu\nu}p_\mu p_\nu-m^2\right]. \tag{61}$$

The controversy in the case of λ- and ρ-spinors of the $(1/2\otimes 0)$ $(0, 1/2)$ representation is: I cited Ahluwalia et al., Ref. [2][13]: "*To studythe locality structure of the fields* Λ(x) *and* λ(x), *we observe that fieldmomenta are*

$$\prod\left(x\right)=\tfrac{\partial L^\Lambda}{\partial\dot{\Lambda}}=\tfrac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\Lambda}\left(x\right), \tag{62}$$

[13] The notation should be compared with the cited papers.

and similarly $\pi(x) = (\partial/\partial t)\ \lambda\neg(x)$. *The calculational details for the two fields now differ significantly. We begin with the evaluation of theequal time anticommutator for* $\Lambda(x)$ *and its conjugate momentum*

$$\{\Lambda(x,t),\Pi(x',t)\} = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2m}e^{ip\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \times \sum_a \underbrace{\left[\xi_a(p)\bar{\xi}_a(p) - \varsigma_a(-p)\bar{\varsigma}_a(-p)\right]}_{=2m(I+Ç(p)}$$

The term containing Ç (**p**) *vanishes only when* $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ *lies along the* z_e *axis (see Eq. (24) [therein], and discussion of this integral in Ref. [31])*

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}' \text{ along } z_e: \qquad \{\Lambda(\mathbf{x}, t),\ \Pi(\mathbf{x}', t)\} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')I. \tag{63}$$

The anticommutators for the particle/antiparticle annihilation and cre-ation operators suffice to yield the remaining locality conditions,

$$\{\Lambda(\mathbf{x}, t),\ \Lambda(\mathbf{x}', t)\} = O, \qquad \{\Pi(\mathbf{x}, t),\ \Pi(\mathbf{x}', t)\} = O. \tag{64}$$

The set of anticommutators contained in Eqs. (63) and (64) establishthat $\Lambda(x)$ *becomes local along the* z_e *axis. For this reason, we call* z_e *as the dark axis of locality.*"

Next, I cite Rodrigues *et al.*, Ref. [3]: "*We have shown through ex- plicitly and detailed calculation that the integral of* (**p**) *appearing inEq. (42) of Ç [2] is null for* $\mathbf{x}\ \mathbf{x}'$ *lying in three orthonormal spatial directions in the rest frame of an arbitrary inertial frame* $\mathbf{e}_0 = \partial/\partial t$.

This shows that the existence of elko spinor fields does not implies inany breakdown of locality concerning the anticommutator of $\{\Lambda(\mathbf{x},t), \Pi(\mathbf{x}', t)\}$ *and moreover does not implies in*

any preferred space- like direction field in Minkowski spacetime."

Who is right? In 2013 W. Rodrigues [4] changed a bit his opinion. He wrote: "*When* $\Delta_z = 0$, $\hat{}(\mathbf{x}\ \mathbf{x}')$ *is null the anticommutator is* local *and thus there exists in the elko theory as constructed in [2] an infinity number of* "*locality directions*". *On the other hand* $\hat{G}(x-x')$ *is a distribution with support in* $\Delta_z = 0$. *So, the directions* $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, 0)$ *are nonlocal in each arbitrary inertial reference frame* $\mathbf{e}_0$ *chosen to evaluate* $\hat{G}(x-x')$, thus accepting the Ahluwalia et al. viewpoint. Meanwhile, I suggest to use the 8-component (or 16-component) formalism in similarity with the 12-component formalism of this subsection. If we calculate[14]

$$S_F^{(+,-)}(x_2,x_1) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_p}\left[\theta(t_2-t_1)a\Psi_{\pm}^{\sigma}(p)\overline{\Psi}_{\pm}^{\sigma}(p)e^{-ip\cdot x} + \theta(t_1-t_2)b\Psi_{\mp}^{\sigma}(p)\overline{\Psi}_{\mp}^{\sigma}(p)e^{ip\cdot x}\right]$$
$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot x}\ \frac{(\hat{p}\pm m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}, \tag{65}$$

we easily come to the result that the corresponding Feynman-Dysonpropagator gives the

14 For Ψσ see Eq. (33)

local theory in the sense:

$$\sum_{\pm}\left[i\Gamma_{\mu}\partial_2^{\mu}\mp m\right]S_F^{(+,-)}(x_2-x_1)=\delta^{(4)}(x_2-x_1). \tag{66}$$

However, physics should choose only one correct formalism. It is not clear, why two correct mathematical formalisms lead to different physical results? First of all, we should check, whether this possible non- locality in the propagators has influence on the physical observables such as the scattering amplitudes, the energy spectra and the decay widths. Ifnot, we may find some unexpected symmetries in relativistic quantum mechanics/field theory. This is the task for future publications. How- ever, it is already obvious if we would not enlarge the number of com- ponents in the fields (in the propagator) we would not be able to obtainthe formally causal propagators for higher spins and/or for the neutral particles.

The dilemma of the (non)local propagators for the spin S = 1 has alsobeen analized in [33] within the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) formal-ism or the Dirac-Kähler formalism [32]. However, the propagators given in [33] are those in the generalized Duffin-Kemmer-Petiau formalism, infact. They are not in the Weinberg-Tucker-Hammer formalism. More- over, the problem of the massless limit was not discussed in the DKP formalism, which is non-trivial (like that of the Proca formalism [34]).

The dilemma of the (non)local propagators for the spin S = 1 has alsobeen analized in [33] within the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) formal-ism or the Dirac-Kähler formalism [32]. However, the propagators given in [33] are those in the generalized Duffin-Kemmer-Petiau formalism, infact. They are not in the Weinberg-Tucker-Hammer formalism. More- over, the problem of the massless limit was not discussed in the DKP formalism, which is non-trivial (like that of the Proca formalism [34]).

We should use the obtained set of Weinberg propagators (58-61) in the perturbation calculus of scattering amplitudes. In Ref. [29] the am- plitude for the interaction of two 2(2S + 1) bosons has been obtained on the basis of the use of one field only and it is obviously incomplete, see also Ref. [28]. But, it is interesting to note that the spin structure was proved there to be the same, regardless we consider the two-Dirac-fermion interaction or the two-Weinberg S = 1-boson interaction. However, the denominator slightly differs ($1/\bar{\varkappa}^2 \rightarrow 1/2m(\Delta_0 - m)$) in the
cited papers [29] from the fermion-fermion case, where Δ_0, $\bar{\varkappa}$ is the momentum-transfer 4-vector in the Lobachevsky space. More accurate considerations of the fermion-boson and boson-boson interactions in the framework of the Weinberg theory has been reported elsewhere [30]. So, the conclusion of this subsection is: one can construct analogs of the Feynman-Dyson propagators for the 2(2S + 1) model and, hence, local theories provided that the Weinberg states are quadrupled (S = 1 case), and the neutral particle states are doubled.

3. Negative-energy and Tachyonic Solutions.

What is the physical sense of the presented mathematical formalism? Why did we consider four field functions in the propagator for spin-1 inRef. [1, 21]? Let us make some additional observations for spin-1/2 and spin 1.

We have 4 solutions in the original Dirac equation for *u*- and 4 solutions for $v=\gamma^5 u$ (remember we have $p_0=\pm E_p=\mp\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$). See, for example, Ref. [36]. In the S = 1 Weinberg equation [24]we have 12 solutions[15]. Apart $p_0 = \pm E_p$ we have taquionic

[15]In Ref. [28] we have causal solutions only for the S=1 Tucker-Hammer equation.

solutions $p_0 = \pm E_p = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}, i.e. m \to im$. This is easily to be checked on using the algebraic equations and solving them with respect to p_0:

$$\mathrm{Det}[\gamma^\mu p_\mu \pm m] = 0\,, \tag{67}$$

and

$$\mathrm{Det}[\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \pm m^2] = 0\,. \tag{68}$$

In construction of field operator [36] we generally need $u(-p) = u(-p_0, \mathbf{p}, m)$ which should be transformed to $v(p) = \gamma^5 u(p) = \gamma^5 u(+p_0, +\mathbf{p}, m)$. On the other hand, when we calculate the parity properties we need $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$. The $u(p_0, -\mathbf{p}, m)$ satisfies

$$[\tilde{\gamma}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2] u(p_0, -\mathbf{p}, m) = 0\,. \tag{69}$$

The $u(-p_0, \mathbf{p}, m)$ "spinor" satisfies:

$$[\tilde{\gamma}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2] u(-p_0, +\mathbf{p}, m) = 0\,, \tag{70}$$

that is the same as above. The tilde signifies $\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \gamma_{00}\gamma^{\mu\nu}\gamma_{00}$ that is analogoues to the $S = 1/2$ case $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma_0\gamma^\mu\gamma_0$. The $u(-p_0, -\mathbf{p}, m)$ satisfies:

$$[\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2] u(-p_0, -\mathbf{p}, m) = 0\,. \tag{71}$$

This case is opposite to the spin-1/2 case where the spinor $u(-p_0, \mathbf{p}, m)$ satisfies

$$[\tilde{\gamma}^\mu p_\mu + m] u(-p_0, +\mathbf{p}, m) = 0\,, \tag{72}$$

and $u(p_0, -\mathbf{p}, m)$,

$$[\tilde{\gamma}^\mu p_\mu - m] u(p_0, -\mathbf{p}, m) = 0\,, \tag{73}$$

and

$$[\gamma^\mu p_\mu + m] u(-p_0, -\mathbf{p}, m) = 0\,. \tag{74}$$

In general we can use $u(p_0, +\mathbf{p}, m)$ or $u(p_0, \underline{\mathbf{p}, m})$ to constructthe causal propagator in the spin-1/2 case. However, we need not to use both because a) $u(p_0, +\mathbf{p}, m)$ satisfies the same equation as $u(+p_0, \mathbf{p}, m)$and b) we have the integration over $\mathbf{p}$. This integration is invariant with respect to $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$:

$$S_F(x_2, x_1) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \tag{75}$$

$$\left[\ \theta(t_2 - t_1) a u^\sigma(p) \bar{u}^\sigma(p) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} + \theta(t_1 - t_2) b v^\sigma(p) \bar{v}^\sigma(p) e^{+ip\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)x}\ \right].$$

So the result for the causal propagator

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{76}$$

does not change regardless the use of one or another Dirac equation.

The situation is different for spin 1. The tachyonic solutions of theoriginal Weinberg equation

$$[\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2] u(p_0, +\mathbf{p}, m) = 0 \tag{77}$$

are just the solutions of the equation with the opposite square of $m \to im$):

$$[\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2] u(p_0, +\mathbf{p}, im) = 0\,. \tag{78}$$

We cannot transform the propagator of the original equation (77) to thatof (78) just by the change of the variables as in the spin-1/2 case. The mass square changed the sign, just as in the case of v "spinors". Whenwe construct the propagator we have to take into account this solution and the superposition $u(p, m)$ and $u(p, im)$, and corresponding equations.

The conclusion is paradoxical: in order to construct the causal propagator for the spin 1 we have to take acausal (tachyonic) solutions of homogeneous equations into account. It is not surprising that the propa-gator is not causal for the Tucker-Hammer equation because it does notcontain the tachyonic solutions. Probably, this statement is valid for all higher spins.

The Conclusions.

First of all, the point of my paper is: there are "negative-energy solutions" in that is previously considered as "positive-energy solutions" ofrelativistic wave equations, and vice versa. Their explicit forms have been presented. For example in the $S = 1/2$ case both algebraic equation

$\mathrm{Det}(\hat{p} - m) = 0$ and $\mathrm{Det}(\hat{p} + m) = 0$ for u^- and v^- 4-spinors for higher-spin equations. Meanwhile, every book applies the Dirac- Feynman-Stueckelberg procedure for elimination of negative-energy solutions. The recent Ziino works (and, independently, the articles of sev eral other authors) show that the Fock space can be doubled. We re- consider this possibility on the quantum-field level for both $S = 1/2$ andhigher spin particles. Next, the relations to the previous works have been found. For instance, the doubling of the Fock space and the corresponding solutions of the Dirac equation and those of higher-spin equations obtained additional mathematical bases in this paper. The tachyonic solutions seem to play crucial role in construction of the propagators for higher spins.

Acknowledgments.

I acknowledge discussions with Prof. N. Debergh, the late Prof. W. Ro-drigues, Jr. and the late Prof. Z. Oziewicz. I am grateful to the ZacatecasUniversity for professorship. I appreciate discussions with participants of several recent Conferences, and referee recommendations.

References

1. V. V. Dvoeglazov, Rev. Mex. Fis. 65, 612 (2019).
2. D. V. Ahluwalia and D. J. Ernst, Int. J. Mod. Phys. E2, 397(1993); D. V. Ahluwalia et al., Phys. Lett. B687 (2010) 248; idem. Phys. Rev. D83, 065017 (2011).
3. W. Rodrigues, Jr. et al., Phys. Rev. D86, 128501 (2012); Erratum: ibid. D88, 129901 (2013); arXiv: 1210.7207v4.
4. W. Rodrigues, Jr. et al., Int. J. Theor. Phys. 53, 4381 (2014), see Appendix B therein.
5. N. Debergh, J-P. Petit and G. D'Agostini, J. Phys. Comm. 2, 115012 (2018).
6. D. V. Ahluwalia and A. C. Nayak, Int. J. Mod. Phys. D23, 1430026 (2014).
7. D. Sakharov, JETP Lett. 5, 24 (1967).
8. E. Chubykalo and S. J. Vlayev, Eur. J. Phys. 19, 1 (1998).
9. L. H. Ryder, Quantum Field Theory. (Cambridge University Press, Cambridge,1985).
10. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory. (McGraw-Hill Book Co. New York, 1980).
11. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields. 2nd Edition. (Nauka, Moscow. 1973).
12. V. V. Dvoeglazov, J. Phys. Conf. Ser. 284, 012024 (2011), arXiv:1008.2242.
13. V. V. Dvoeglazov, Hadronic J. Suppl. 18, 239 (2003), arXiv: physics/0402094; Int J. Mod. Phys. B20, 1317 (2006).
14. M. Markov, ZhETF 7, 579 (1937); ibid. 603; *Nucl. Phys.* **55**, 130. (1964).
15. Barut and G. Ziino, *Mod. Phys. Lett.* A**8**, 1011 (1993); G. Ziino, *Int. J. Mod. Phys.* A**11**, 2081 (1996).
16. M. Gelfand and M. L. Tsetlin, *ZhETF* **31**, 1107 (1956); G. A. Sokolik, *ZhETF* **33**, 1515 (1957).
17. V. V. Dvoeglazov, *Int J. Theor. Phys.* **34**, 2467 (1995); *Nuovo Cim.* B**111**, 483 (1996); ibid. A**108**, 1467 (1995); *Mod. Phys. Lett.* A**12**,2741 (1997).
18. V. Ahluwalia, *Int. J. Mod. Phys.* A**11**, 1855 (1996).
19. M. Kirchbach, C. Compean and L. Noriega, *Eur. Phys. J.* A**22**, 149(2004).
20. R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109**, 193 (1958).

21. V. V. Dvoeglazov, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 1915 (1998).
22. [22] L. Fabbri, *Int. J. Theor. Phys.* **53**, 1896 (2014), arXiv: 1210.1146.
23. [23] G.-J. Ni, in "*Relativity, Gravitation, Cosmology: New Develop-ments*". (Nova Science Pubs., NY, USA, 2010), p. 253.
24. [24] S. Weinberg, *Phys. Rev.* B**133**, 1318 (1964).
25. V. Ahluwalia and D. J. Ernst, *Phys. Rev.* C**45**, 3010 (1992).
26. V. V. Dvoeglazov, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 1915 (1998).
27. Barut, I. Muzinich and D. Williams, *Phys. Rev.* **130**, 442(1963).
28. R. H. Tucker and C. L. Hammer, *Phys. Rev.* D**3**, 2448 (1971).
29. V. V. Dvoeglazov, *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 115 (1996).
30. V. V. Dvoeglazov, *J. Phys. Conf. Ser.* **128**, 012002 (2008).
31. V. Ahluwalia-Khalilova and D. Grumiller, *Phys. Rev.* D**72**,067701 (2005); *JCAP* **0507**, 012 (2005).
32. I. Kruglov, *Int. J. Theor. Phys.* **41**, 653 (2002), arXiv:hep-th/0110251.
33. I. Kruglov, in *"Einstein and Hilbert: Dark Matter".* (Nova Sci-ence Pubs, NY, USA, 2012) p. 107, arXiv: 0912.3716.
34. Hradyskyi and Yu. P. Stepanovskiy, *Ukr. J. Phys.* **63**, 584(2018).
35. Sankaranarayanan and R. H. Good, jr., *Nuovo Cim.* **36**, 1303(1965).
36. Cazares and V. V. Dvoeglazov, Rev. Mex. Fis. **69**, 050703 1-9(2023).

Valeriy V. Dvoeglazov
UAF, Universidad de Zacatecas
Apartado Postal 636, Suc. 3 Zacatecas 98061, Zac., Me´xico
e-mail: valeri@fisica.uaz.edu.mx

РОЗВ'ЯЗКИ З ВІД'ЄМНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ТА ТАХІОНІЧНІ РІВНЯННЯ ВАЙНБЕРГА-ТАКЕРА-ХАММЕРА ДЛЯ СПІНА 1

У статті [1] ми розглянули рівняння Вайнберга, щоб побудувати пропагатор Фейнмана-Дайсона для частинок зі спіном 1. Ця конструкція базується на концепції поля Вайнберга як системи чотирьох польових функцій, що відрізняються парністю та подвійними перетвореннями. Ми також проаналізували нещодавню суперечку щодо визначення пропагатора Фейнмана-Дайсона для оператора поля, що містить S = 1/2 спряжених станів власного/антивласного заряду в статтях Д. Алуваліа та ін. [2] та B. Rodrigues Jr. та інші [3, 4]. Розв'язка цієї математичної суперечки очевидна. Я запропонував необхідне подвоєння простору Фока (як у роботах Барута та Зіно), розширивши таким чином відповідну алгебру Кліффорда. Однак логічні взаємозв'язки різних математичних основ з фізичними інтерпретаціями не настільки очевидні. У цій роботі ми представляємо деякі ідеї щодо цього для спінів 1/2 та 1. Тим часом у статті N. Debergh та інших розглядалися наші старі ідеї подвоєння рівняння Дірака та інші форми T- та PT-кон'югації [5].]. Обидва алгебраїчні рівняння Det(pˆ − m) = 0 і D√et (pˆ + m) = 0 для u− і v− 4-спіноров мають розв'язки з p0 = ±Ep = ± Те саме стосується рівнянь із вищим спіном (або вони навіть можуть мати більш складні дисперсійні співвідношення). Тим часом у кожній книзі розглядається рівність p0 = Ep як для u, так і для v спінорів представлення (1/2, 0) (0, 1/2)), таким чином застосовуючи процедуру Дірака-Фейнмана-Штукельберга для усунення розчини з негативною енергією. Простір Фока можна подвоїти на рівні квантового поля (QFT). У цій статті ми надаємо додаткові основи для розвитку правильної теорії частинок з вищим спіном у КТП. Здається, неможливо належним чином розглядати релятивістську квантову механіку без негативних енергій, тахіонів і відповідних форм дискретних симетрій, а також їх дії на відповідні фізичні стани.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

HILBERT'S 6th PROBLEM: THE RELATIVISTIC VERSION

Y. Elskens[1], M.K.-H. Kiessling[2], A.S. Tahvildar-Zadeh[2]

1: *Aix-Marseille université, UMR 7345 CNRS, Case 322, Campus Saint-Jérôme, 13397 Marseille Cedex 13, France*
2: Department of Mathematics, Rutgers, The State University of New Jersey, 110 Frelinghuysen Rd., Piscataway, NJ 08854, USA
e-mail: miki@math.rutgers.edu

Hilbert's 6th problem has been called ``The axiomatic foundations of physics.'' In 1900, physics still meant pre-relativistic classical physics. Newton had formulated his atomistic mechanics axiomatically already. Hilbert elaborated that he meant the rigorous derivation of the effective laws of everyday physics from the more fundamental axiomatic atomistic laws.

As a particular example Hilbert mentioned the derivation of the kinetic Maxwell-Boltzmann equation of a dilute neutral gas from Newton's mechanics of many tiny hard balls. Quite some progress has been made on this front in the past 120+ years, not only for the Maxwell-Boltzmann equation but also for other kinetic equations, in particular the Vlasov equations of a Coulomb plasma and the Jeans equation of stellar dynamics. Yet there still is room for improvement and much left to be done in order to fulfill Hilbert's program in its original formulation.

The birth of the special theory of relativity in 1905, and of the general one in 1916, and then of quantum theory in the mid 1920s, has made it plain that analogous versions of Hilbert's 6th problem could be posed in these contexts as well, at least in principle. In this talk we will focus mostly on the progress made on the special-relativistic version; the general-relativistic version is still only in its baby stage.

The special-relativistic analog of the Vlasov kinetic equations for a Coulomb plasma is known as the relativistic Vlasov-Maxwell system (of equations) for a plasma with electromagnetic interactions. Its Cauchy problem in unbounded space is locally well-posed classically, and while it is not yet settled whether it is always globally well-posed classically, it has been shown that for nearly neutral data it is.

The rigorous derivation of the relativistic Vlasov-Maxwell system from a more fundamental microscopic classical description has faced a very serious obstacle at step one already: the prototype, known as Lorentz electrodynamics with point charges, is notoriously ill-defined, claims to the contrary in the plasma physics literature notwithstanding. The reason are the infinite self-interactions of the point charges.

A putative way out of the dilemma was first suggested by Max Born in 1933, soon joined by Leo Infeld, who argued that the infinite self-energy problem would go away by interpreting Maxwell's law of the electromagnetic vacuum (what Maxwell called the law of the pure ether) as the weak-field linear approximation to a nonlinear law that they proposed. The complicated nonlinearity of their algebraic law has slowed down progress substantially, though. In 1940, Fritz Bopp, and soon after Alfred Landé

and Llewellyn Thomas, and then Boris Podolsky, proposed a linear differential law, here called the BLTP vacuum. Still there was a problem: the Lorentz force expression for self-forces was still ill-defined. Based on the principle of local conservation of total momentum, a joint initial value problem for the electromagnetic fields and N point charges in a BLTP vacuum was recently formulated [1] and shown to be locally well-posed [2], and in [3] a road map was presented for how the relativistic Vlasov-Maxwell system could be derived from this microscopic BLTP electrodynamics. A synopsis of the key ideas and results will be presented in this talk.

The general-relativistic analog of the relativistic Vlasov-Maxwell system is the relativistic Vlasov-Maxwell-Einstein system. Also this set of partial differential equations has been studied thoroughly and found to be locally well-posed classically, though it is unlikely it will be found to be globally well-posed — presumably black holes can form for suitable smooth initial data. To pose the general-relativistic analog of Hilbert's 6th problem, a well-posed joint initial value problem for a microscopic classical formulation of N point charges that interact through the electromagnetic and gravitational degrees of freedom of the spacetime is needed. Einstein, Infeld, and Hoffmann started this challenging quest in the late 1930s, and it is still on [4].

[1] M.K.-H. Kiessling, Phys. Rev. D 100, 065012 (2019); Erratum ibid. 101, 109901(E) (2020).
[2] M.K.-H. Kiessling, A.S. Tahlvildar-Zadeh, BLTP electrodynamics as initial value problem, 100+ pages, in preparation (2024).
[3] Y. Elskens, M.K.-H. Kiessling, J. Statist. Phys. 180, 749–772 (2020).
[4] A. Burtscher, M.K.-H. Kiessling, A.S. Tahlvildar-Zadeh, Class. Quantum Grav. 38, 185001 (2021).

ЗОБРАЖЕННЯ ЕВОЛЮЦІЙНО ВИДИМИХ МІНЛИВИХ МНОЖИН У ВИГЛЯДІ МУЛЬТИОБРАЗУ

Я.І. Грушка

Інститут математики НАН України, Київ
e-mail: grushka@imath.kiev.ua

Мотивацією для побудови теорії мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. З інтуїтивної точки зору мінливі множини−це сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати у процесі постійних трансформацій (еволюції), тобто змінювати свої властивості (втрачаючи в кожен момент часу свою формально-математичну самототожність), з'являтись чи зникати, розпадатися на декілька частин чи, навпаки, декілька об’єктів можуть зливатися в один. Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватися залежно від способу спостереження, тобто залежно від системи відліку. Отже, можна сказати, що мінливі множини ближчі до тих “множин”, з якими ми маємо справу в реальній дійсності. І коли ми намагаємося заглибитися в сутність об’єктів, які вивчає фізика та деякі інші природничі науки, ми природним чином приходимо до поняття мінливої множини. Проблема математичної формалізації поняття мінливої множини, тобто проблема побудови математичної теорії мінливих множин, в різних формах ставилася в роботах не лише математиків, але й представників інших природничих наук, зокрема Олександра Лєвіча, Міхаеля Бара, Коліна Макларті, Чарльза Велса, Джона Бела. На математично строгому рівні теорія мінливих множин була побудована в [1, 2] та інших роботах автора, присвячених цій тематиці. Найбільш повний і детальний виклад теорії мінливих множин можна знайти в [3].

В доповіді планується обговорити дуже важливе поняття видимості в мінливих множинах (яке характеризує, наскільки адекватними один до одного можуть бути описи подій різними спостерігачами, в різних системах відліку) та різні градації видимості. Зокрема, буде розглянуто найбільш сильну форму видимості − еволюційну видимість, коли довільні, об’єднані долею в одній системі відліку елементарно-часові стани, переходять в об’єднані долею або синхронні в іншій системі відліку. Важливі для спеціальної теорії відносності та її тахіонових розширень мінливі множини є еволюційно видимими, оскільки вони будуються як мультиобраз деякої базової мінливої множини і можна

довести, що довільний мультиобраз є еволюційно видимим (детальніше див. [3, subsection 27.3, Assertion 3.27.7]).

Сформульований вище результат породжує наступну обернену задачу:

Чи кожну еволюційно видиму мінливу множину можна подати у вигляді мультиобраза деякої базової мінливої множини?

В доповіді планується представити теорему, що дає позитивну відповідь на поставлене питання.

[1] Я.І. Грушка, Видимість у мінливих множинах. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 9, (2), (2012), 122--145, (https://www.researchgate.net/publication/236217050).

[2] Я.І. Грушка, Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 11, (1), (2014), 122--145, (https://www.researchgate.net/publication/268069239).

[3] Ya.I. Grushka, Draft Introduction to Abstract Kinematics (Version 2.0). Preprint ResearchGate: DOI: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521, (2017).

ON THE ELECTRON SPIN, THE RELATED CLIFFORD ALGEBRA AND DIRAC EQUATION NATURE

N.N. Bogolubov[1)] (Jr), A.K. Prykarpatski[2)]

[1)]ICTP, Trieste, Italy
[2)]Cracov University of Technology, Kraków, Poland,
and Lviv Polytechnic University, Lviv, Ukraine
e-mail: pryk.anat@cybergal.com

We will first discuss the electron spin origin within the Fock space approach and the related Clifford algebra structure, next we will consider the Dirac Hamiltonin operator and proceed to the electron spectrum energy problem from a rigorous mathematical physics point of view. We will treat the electron Hamiltonian operator structure on the Fock space background and analyze the related symmetry algebra properties of its representations. Subject to our physical real spacetime we assume as a fact the existence of such an elementary particle as electron, specifed by its nonzero discrete charge parameter, localized in the Minkowski spacetime M^4. Its coordiantes are, obviously, important for specifying electron by means of external and independent observables allowed by the physical world. We naturally also accept that there exist also another elementary particles like proton, photon, mesons etc, considered as quants of the physical world structure, and which are indistinguishable, that is identical within each particle kind. Moreover, we accept such experimentally approved important physical phenomena as creation and annihilation of elementary quantum particles during their interaction in the ambient spacetime. At the beginning of the past 20 century both qualitive and quantitive properties of these quantum physical phenomena have been efectively enough described by classical theoretical physicists W. Pauli, E. Schrödinger, W. Heisenberg, P. Dirac and others within first quantum mechanics and next quantum field theory by means of modern mathematical tools, based on special differential-operator expressions, called "Hamiltonians", jointly with the related spectral theory of special linear differential-operator Schredinger equations in the corresponding Hilbert space H of complex-valued functions $f : R^3 \to C$; integrable with respect to the usual Lebesgue measure dx for $x \in R^3$; and whose solutions possess almost all information about the evolution of quantum particle states in spacetime and their interaction with neighborhood. In particular, theoretical physicists soon enough understood that each quantum event in microuniverse, related with such elementary particles, can be well modelled by means of some special operator on the Fock space of the corresponding quantum states, and in case of electron, the mostly fundamental facts – their creations and annihilations in physical vacuum. These fundamental operator objects on the Fock space and the related symmetry properties of their algebraic representations proved to be governing in deepening our understanding the electron spin nature and its importance for the mattaer stability in the Universe. The elementary point charged particle, like electron, its spin, energy spectrum and mass

problem were inspiring many physicists from the past as J. J. Thompson, G.G. Stokes, H.A. Lorentz, E. Mach, M. Abraham, P.A. M. Dirac, G.A. Schott and others. Nonetheless, their studies have not given rise up to date to a clear explanation of this phenomenon that stimulated new researchers to tackle it from di¤erent approaches based on new ideas stemming both from the classical Maxwell-Lorentz electromagnetic theory, and modern quantum field theories of Yang-Mills and Higgs type and other, whose recent and extensive review was done in [1,2]. In our report we mostly will concentrate on some details of quantum analysis of the spin structure and its dependence on the symmetry properties of the related representations of the basic Clifford algebra, generated by creation-annihillation operators. The self-interaction phenomenon is dicussed within the quantum renormalized Lorenz constraint on a suitably reduced Fock space. The electron energy problem for the photon dressed electron model is analyzed within the Fock many-temporal approach [3-5] and the Feynman proper time paradigm [6] subject to deriving the quantum electromagnetic Maxwell equations. For the .rst time the proper time approach to classical electrodynamics and quantum mechanics was possibly suggested still in 1937 by V. Fock [2], in which, in particular, there was constructed an alternative proper time based Lagrangian description of a point charged particle under external electromagnetic field. A more detailed dynamical motivation of using the proper time approach was later presented by R. Feynman in his Lectures [6]. Based on these motivations, we have stated that the self-interacting quantum mechanism of the charged particle with its self-generated electromagnetic .eld consists of two physically di¤erent phenomena, whose infuence on the structure of the resulting Hamilton interaction operator proved to be crucial, ensuing a modified analysis of the problem within the Lagrangian formalism.

[1] F. Wilczek, QCD and natural phylosophy. Ann. Henry Poincare, 4, 2003, 211-228
[2] F. Wilczek, Origins of Mass, MIT-CTP/4379. arXiv:1206.7114v2 [hep-ph], 22 Aug 2012[
[3] V. Fock, . Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik. Sow. Phys., 1937, 12, p. 404-425
[4] N.N. Bogolubov (Jr.) and A.K. Prykarpatsky and D. Blackmore, Maxwell.Lorentz Electrodynamics Revisited via the Lagrangian Formalism and Feynman Proper Time Paradigm. Mathematics 2015, 3, 190-257
[5] A.K. Prykarpatski, On the electron spin and spectrum energy problems within the Fock many temporal and Feynman proper time paradigms, J. Phys.: Conf. Ser. 2482, 2023, 12017
[6] R. Feynman, R. Leighton. and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics. Electrodynamics, v. 2, Addison-Wesley, Publ. Co., Massachusetts, 1964

PRODUCTION OF SUPERHEAVY NUCLEI IN HOT-FUSION REACTIONS

V.Yu. Denisov

Institute for Nuclear Research, Nat. Acad. Sci. Ukr., Kyiv, Ukraine
National Laboratories of Legnaro, Nat. Inst. Nuclear Physics, Legnaro, Italy
Physical Department, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
e-mail: v.yu.denisov@gmail.com

A new model for hot-fusion reactions leading to the synthesis of superheavy nuclei is discussed [1]. The values of the hot-fusion cross sections obtained in the model agree with the available experimental data. The hot-fusion cross sections are found for two different models of the fission barrier heights of superheavy nuclei.

The calculations of the cross sections for the various hot-fusion reactions leading to the 119 and 120 elements are presented. It is shown, that the projectiles ^{45}Sc and ^{46}Ti can be used for the synthesis of the elements with 119 and 120 protons.

New qualitative expressions have been obtained for the probability of the formation of the compound nucleus and the cross-section of formation in reactions leading to superheavy nuclei. It is shown that the superheavy nuclei production cross section is proportional to the transmission coefficient of the capture barrier, realization probability of the *xn*-evaporation channel, and exponentially depends on the quasielastic barrier, fusion reaction *Q* value, compound nucleus formation barrier, neutron separation energies, and fission barrier heights. These quantities are important for the reaction choice for the synthesis of superheavy nuclei.

It is shown that the various models for the fission barriers and SHN binding energy lead to very different values of the SHN production cross section. This takes place due to dependencies of the compound-nucleus formation probability on these quantities and of the survival probability on the fission barriers.

[1] V.Yu. Denisov, Phys. Rev. 109, 044618 (2024).

INPUT-OUTPUT OPTICS AS A CAUSAL TIME SERIES MAPPING: A GENERATIVE MACHINE LEARNING SOLUTION

A. Sen, B.K Parida, K. Jacobs, D. Bondar

Department of Physics and Engineering Physics, Tulane University, New Orleans, Louisiana 70118, USA
e-mail: asen1@tulane.edu

Optics can be viewed as the study of input-output time series, where an input pulse transforms into an output pulse based on the optical properties of the material. Traditionally, this transformation is determined by solving the time-dependent Schrödinger equation (TDSE), but for high-dimensional quantum systems, especially in phase transition regimes, solving TDSE is often intractable. We propose a data-driven approach, modeling the input-output dynamics of such systems using temporal convolutional networks (TCNs). Focusing on quantum systems generating High Harmonic Generation (HHG) outputs, we identify the minimal TCN architecture required to accurately model these dynamics with the fewest trainable parameters. This minimal parameter count provides a quantitative measure of the system's complexity in producing output signals from input pulses. We also compare this approach to amplitude-aware permutation entropy, showing that both methods effectively characterize system complexity and complement one another.

KOOPMAN-VON-NEUMAN MECHANICS AND GRAVITY

A.Sen

Department of Physics and Engineering Physics, Tulane University, New Orleans, Louisiana 70118, USA
e-mail: asen1@tulane.edu

Koopman-von Neumann (KvN) mechanics reformulates classical mechanics in a Hilbert space, offering new insights through quantum intuition. Using Sudarshan's interpretation, we explore three key directions: (a) the implementation of Einstein's equivalence principle in KvN mechanics, highlighting parallels with quantum mechanics and the absence of quantum interference effects [1,2]; (b) Planck-scale modifications of classical mechanics, showing how quantum gravity effects disrupt classicality within the KvN framework [3]; and (c) the inclusion of spin via Galilean-invariant wave equations, deriving the Lévy-Leblond equation as a null reduction of the massless Dirac equation [4]. These studies underscore KvN mechanics' potential to bridge classical, quantum, and relativistic theories.

[1] S. Dhasmana, A. Sen, Z.K. Silagadze, Ann. Phys. 434, 168623 (2021).
[2] A. Sen, S. Dhasmana, Z.K. Silagadze, Ann. Phys. 422, 168302 (2020).
[3] A. Sen, Z.K. Silagadze, O.I. Chashchina, Int. J. Mod. Phys. D 29(10), 2050070 (2020).
[4] B.K. Parida, A. Sen, S. Dhasmana, Z.K. Silagadze, Mod. Phys. Lett. A 38(32n33), 2350149 (2023).

МАТРИЦІ ПАУЛІ І КВАНТОВІ ОБЧИСЛЕННЯ

А. Антал

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: anandriy87@gmail.com

Існують задачі, які можуть бути розв'язані лише з використанням квантових обчислень (КО), що обумовлено властивостями квантових систем. Фундаментальна модель КО – квантові схеми. За аналогією з класичним комп'ютером, який містить пасивні, активні та логічні елементи, квантовий комп'ютер будується з квантових схем, які складаються з елементарних квантових елементів, що дозволяють передати квантову інформацію та оперувати нею. Будь-яка квантова схема відображає перетворення квантової системи. Еволюція квантової системи, яка не зазнає вимірювання, переводить вихідний стан квантової системи в інший зі збереженням норми. Для Гільбертового простору перетворення має бути унітарним. Довільне унітарне перетворення є допустимим квантовим перетворенням і навпаки. Таким чином, умова унітарності є єдиним обмеженням, яке накладається на квантові елементи. Унітарне перетворення може бути трактоване як повороти в комплексному векторному просторі. Важливим наслідком того факту, що будь-яке квантове перетворення унітарне, є його оборотність. Тому квантові логічні елементи (квантові ґейти − «quantum gates») повинні бути оборотними.

Квантова схема є квантовою обчислювальною моделлю, побудованою з квантових логічних ґейтів, в яких обчислювальні кроки синхронізовано в часі. Входи квантових ґейтів зв'язані з входами схеми або виходами інших ґейтів. Складна унітарна операція може бути представлена у вигляді схеми, яка складається з кількох квантових ґейтів. Здійснюючи унітарні перетворення, які відповідають певним логічним операціям, отримаємо квантовий процесор. Роль з'єднань (провідників) виконуватимуть кубіти, а роль логічних блоків (ґейтів), на які розкладається весь процес обчислень, виконуватимуть унітарні перетворення. Дана концепція КО була запропонована Д. Дейчем [1]. Було доведено, що одно- та двохкубітних блоків достатньо для отримання всього необхідного набору унітарних перетворень.

Основним елементом будь-яких квантових схем є вентилі Паулі, названі на честь В. Паулі. Вони базуються на відомих матрицях Паулі (вони ж спінові матриці Паулі) [2], оскільки спін електрона, як властивість, може бути використаний для кубіта в квантових воротах, а матриці і вентилі Паулі

знаходять широке застосування. Для кожної осі в просторі (X, Y, Z) існує один вентиль/матриця Паулі. Вентилі Паулі – це одні з найпростіших квантових вентилів. Вентилі діють на один і лише один кубіт за раз.

Вентиль Паулі-X відповідає класичному вентилю NOT. Саме з цих міркувань, вентиль-X також часто називається квантовим NOT вентилем. Графічне зображення вентилю Паулі таке 

. Елемент NOT діє лінійно, здійснюючи наступні перетворення: $U_{NNN}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$. Представлення квантового елемента NOT в матричному вигляді: $X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Якщо квантовий стан $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ представити у векторному вигляді: $\psi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, де α відповідає амплітуді стану $|0\rangle$, а β – $|1\rangle$, то дію квантового елемента NOT можна записати наступним чином: $X\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$. Вентиль Паулі $Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ займає важливе місце в квантових схемах, він залишає стан $|0\rangle$ без змін, а $|1\rangle$ переводить в стан $-|1\rangle$: Вентиль Паулі Y є комбінацією елементів X та Z: $Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Даний елемент здійснює перетворення: $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ та $|1\rangle \rightarrow -|0\rangle$.

Фундаментальним квантом вентилем є елемент Адамара [3]. Він дозволяє відійти від полюсів сфери Блоха [4] і створити суперпозицію станів. Це перетворення, яке описується матрицею $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, відіграє ключову роль в багатьох квантових схемах, здійснюючи перетворення: $|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ і $|1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$. Елемент Адамара є важливим квантовим елементом, а його дія просто представляється на сфері Блоха, де дії однокубітних елементів відповідають обертанню сфери. Операція Адамара – це обертання сфери навколо осі *y* на 90° з наступним обертанням навколо площини *xy* на кут 180°, як показано на рис.1.

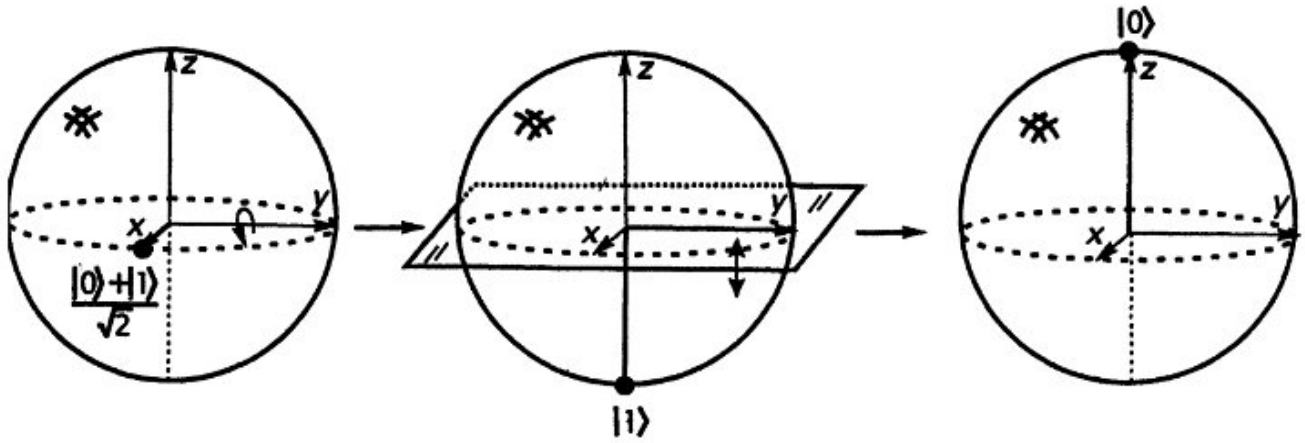
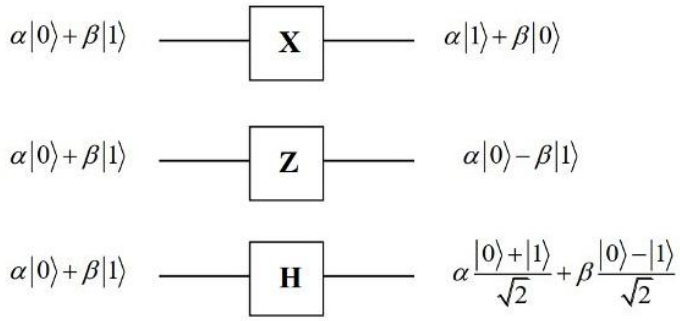


Рис.1. Операція Адамара

Таким. чином, дія вентилів Паулі зводиться до відомих квантово-механічних перетворень:



Підсумовуючи, можна стверджувати, що технологічний стрибок до області квантових обчислень став можливим, завдяки фундаментальним напрацюванням фізиків-теоретиків і математичному апарату квантової механіки в питаннях глибокого розуміння мікросвіту.

[1]. D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer Proc. Roy. Soc. London A 400, 97 (1985).
[2]. W. E. Pauli, Prinzipien der Wellenmechanik. (1947), Wienn, p. 332
[3]. J. S. Hadamard, Géométrie non euclidienne dans la théorie des fonctions automorphes., (1950), p.137.
[4]. F. Bloch. Atoms in Variable in magnetic fields. Rev. Mod. Phys., v.17, N2, (1945), p.237-244. Quantum Spin (3) - The Bloch Sphere. (n.d.).
[5]. https://www.youtube.com/watch?v=10qvMocHFZg&t=1769s.

THE INFLUENCE OF THE ELECTRIC FIELD AND THE POSITION OF THE ACCEPTOR ON THE ENERGY SPECTRUM AND THE INTERSUBBAND OPTICAL ABSORPTION COEFFICIENT IN THE GAAS/ALAS QUANTUM DOT HETEROSTRUCTURE

H.Ya. Bandura, I.V. Bilynskyi

Physics Department, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University,

3 Stryiska Street, 82100 Drohobych, Ukraine

e-mail: galinka.bandura@gmail.com

The modern nanotechnologies enable the creation of various nanostructures with predefined properties. Among them, quantum dots (QDs) attract the most attention. The optical properties of QDs are influenced by several factors: the shape of the QD, the material of the QD, its surroundings, and the presence of impurities of both donor and acceptor types. Applying an electric field causes a shift in the energy levels of QDs, which can be experimentally observed and utilized in the development of optoelectronic devices.

To study the optical absorption of light in GaAs/AlAs quantum dot heterosystems, the intersubband light absorption coefficient was calculated. The optical characteristics of many devices based on bulk and nanoscale semiconductors are significantly influenced by the presence of impurities. Devices created with impurities play a key role in the development of modern electronics. Impurities introduced into semiconductors alter their electrical properties, paving the way for the creation of various devices. Through the doping process, important devices such as diodes, transistors, solar cells, LEDs, photodiodes, and thermistors are manufactured. Additionally, acceptor impurities play a crucial role in changing the energy spectra of nanosystems, which have been extensively studied by many researchers. The introduction of external parameters such as magnetic field, temperature, and electric field can modify the electronic properties of low-dimensional systems.

As is well known, an electric field has a significant impact on the distribution of charge carriers and simultaneously causes an energy shift, making it a useful tool for studying material properties and providing valuable information about them. Many authors have studied the effect of an electric field on spherical quantum dots (QDs). The electric field can be either longitudinal or transverse in relation to the impurity's position. Moreover, impurities can be intentionally or unintentionally introduced into a semiconductor during the growth process. This leads to the formation of bound states and causes several important effects on the electrical and optical properties of the materials.

This work investigates the influence of quantum dot size, heterosystem material, and the presence of acceptor impurities on the intersubband absorption coefficient in nanostructures based on spherical quantum dots. The optical absorption coefficients were calculated for different values (ranging from -5×10^7 *V/m* to 5×10^7*V/m*) and directions of the electric field (either along the axis or perpendicular to the direction of the quantum dot center-impurity) in the presence of an acceptor. The results show that the presence of an electric field in combination with an impurity leads to the existence of two absorption bands corresponding to |M| = 1/2 and 3/2. As in the case without an electric field and with an off-center acceptor impurity, the absorption bands corresponding to transitions between states with |M| = 3/2 are larger than those corresponding to transitions between states with |M| = 1/2.

This research is aimed at improving the understanding and optimization of the optical properties of nanomaterials, as well as at controlling the properties of such heterosystems in order to create optimal optoelectronic devices.

DYNAMICS IN THE FEW-FERMION HUBBARD MODEL: RESONANT TUNNELING AND UNDERBARRIER RESONANT TRAPPING

E. Bilokon,[1,2] V. Bilokon,[1,2] D.R. Lindberg,[1] A. Sotnikov,[2,3] D.I. Bondar[1]

[1]Department of Physics and Engineering Physics, Tulane University, New Orleans, Louisiana 70118, United States
[2]Akhiezer Institute for Theoretical Physics, NSC KIPT, Akademichna 1, 61108 Kharkiv, Ukraine
[3]Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, 61022 Kharkiv, Ukraine
e-mail: ebilokon@tulane.edu

Tunneling is a pivotal phenomenon in quantum physics, underpinning an exceptionally broad range of phenomena. In particular, it plays a critical role in many-body physics. However, understanding quantum many-body systems becomes exceedingly difficult in the presence of strong correlations. To simplify their description, one effective approach is to study few-body systems, which capture essential properties and provide insights into the major phenomena of the system under investigation.

We demonstrate the richness of the tunneling dynamics in few-body fermionic lattice systems in the presence of an external asymmetric potential. We show that the behavior of the interacting fermions is highly sensitive to the initial conditions leading to vastly different effects. Although the few-body system is relatively simple compared to its many-body counterpart, we demonstrate that it encapsulates essential features and reveals critical phenomena of the resonant tunneling and underbarrier resonant trapping.

DECOHERENCE-FREE ENTROPIC GRAVITY: MODEL AND EXPERIMENTAL TESTS

Denys Bondar

Tulane University New Orleans, USA
e-mail: dbondar@tulane.edu

Erik Verlinde's theory of entropic gravity, postulating that gravity is not a fundamental force but rather emerges thermodynamically, has garnered much attention as a possible resolution to the quantum gravity problem. Some have ruled this theory out on grounds that entropic forces are by nature noisy and entropic gravity would therefore display far more decoherence than is observed in ultra-cold neutron experiments. We address this criticism by modeling linear gravity acting on small objects as an open quantum system. We show that the proposed master equation is fully compatible with the *qBounce* experiment for ultra-cold neutrons. In addition, comparing our mode of entropic gravity to the Diosi-Penrose model for gravity induced decoherence indicates that the two theories are incompatible.

ALCHEMY AS AN OPTICAL PROBLEM: THEORY AND EXPERIMENTS

Denys Bondar

Tulane University New Orleans, USA
e-mail: dbondar@tulane.edu

Using tracking quantum control, we theoretically unveiled an unexplored flexibility of nonlinear optics that a shaped laser pulse can drive a quantum system to emit light as if it were an arbitrary different system. This realizes an aspect of the alchemist's dream to make different elements *look alike*, albeit for the duration of a laser pulse. This finding has received broad public coverage in such scientific outlets as Physics, PhysicsWorld, Nature Materials, Quanta Magazine, Wired, *etc* We will show how this unexplored flexibility of nonlinear optics opens new venues of investigation that include ultrafast artificial intelligence, chemical mixture characterization, and broadband ENZ materials with infinite phase velocity of light. Based on these theoretical insights, recent experimental results will be presented, showing how water can be transformed into alcohol and how ENZ materials can be dynamically created.

СПІН-ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ЕФЕКТИ У ПРОЦЕСІ МАГНІТОГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В СИЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

М. Дяченко, О. Новак

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми
e-mail: mykhailo.m.diachenko@gmail.com

Актуальність теоретичного дослідження процесів квантової електродинаміки (КЕД), що відбуваються під дією сильного зовнішнього магнітного поля, зумовлена наявністю таких фізичних об'єктів як нейтронні зірки, де магнітне поле досягає критичного значення (пульсари) або й перевищує його (магнетари). В теоретичних моделях таких об’єктів елементарні КЕД процеси відіграють ключову роль, зокрема, у процесі генерації електрон-позитронної плазми біля полюсів зірки.

Слід зазначити, що протягом останнього часу великий інтерес приділяється експериментальній перевірці нелінійних КЕД ефектів. Плануються експерименти з використанням потужних лазерів. Такі експерименти будуть проведені в HIBEF (the Helmholtz International Beamline for Extreme Fields) на установці XFEL (European X-ray Free Electron Laser, Germany) [1], а також на ELI (Extreme Light Infrastructure, Czech Republic, Romania, Hungary) [2]. Слід відмітити і появу перших результатів дослідження поляризації оптичного випромінювання від нейтронних зірок, де значення магнітного поля близьке до критичного. Було вперше визначено ступінь поляризації оптичних фотонів для ізольованої нейтронної зірки RX J1856.5-3754, що може бути проявом поляризації вакууму в сильному магнітному полі [3].

В рамках квантової електродинаміки процес синхротронного випромінювання електроном в магнітному полі досліджувався в багатьох роботах. Процес розглядався як в ультрарелятивістському наближенні, так і у наближенні найнижчих рівнів Ландау (LLL approach − Lowest Landau Level approach). LLL наближення потребує наявності сильного магнітного поля, яке порівняно з критичним полем Швінгера. У магнітних полях, які характерні для магнітосфери нейтронних зірок, даний процес досліджено, зокрема, в роботі [4]. В процесі магнітогальмівного випромінювання істотними є поляризаційні явища і важливо враховувати як поляризацію випромінювання, так і спіни частинок. Аналіз еволюції спіна електрона (позитрона) призвів до відкриття такого явища як радіаційна самополяризація частинок, що рухаються в накопичувальних кільцях. Як результат, 92% електронів мають спін, орієнтований проти напрямку магнітного поля. Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених дослідженню КЕД процесів в магнітному полі, і досі залишається недостатньо вивченим вплив поляризації частинок на ймовірності процесів для випадку надкритичного магнітного поля, що і досліджується в даній роботі.

В рамках квантової теорії поля проведено дослідження процесу синхротронного випромінювання електрона в сильному зовнішньому магнітному полі. Знайдено аналітичні вирази ймовірностей процесу для довільного значення поля з урахуванням поляризації частинок. Показано, що у випадку надкритичного поля, коли випромінювання розповсюджується перпендикулярно до нього, ймовірності основного та спін-фліп каналів вирівнюються. Знайдено параметри Стокса магнітогальмівного випромінювання і показано, що воно повністю поляризоване для обох випадків проекцій спіну початкових електронів. Показано, що для випадку, коли електрон випромінює вздовж магнітного поля, маємо праву кругову поляризацію, а коли перпендикулярно, то для основного спінового стану буде нормальна поляризація, а для інверсного – анормальна (рис. 1а). У випадку ж неполяризованого пучка електронів, коли випромінювання розповсюджується перпендикулярно полю, то лінійна поляризація залежить від величини магнітного поля. Так, в субкритичному полі випромінювання буде нормально поляризоване, а в надкритичному – ступінь поляризації прямує до нуля (рис. 1б). Знайдено залежність диференціальної інтенсивності випромінювання від кута і показано, що зі збільшенням магнітного поля з'являється конус синхротронного випромінювання перпендикулярно полю.

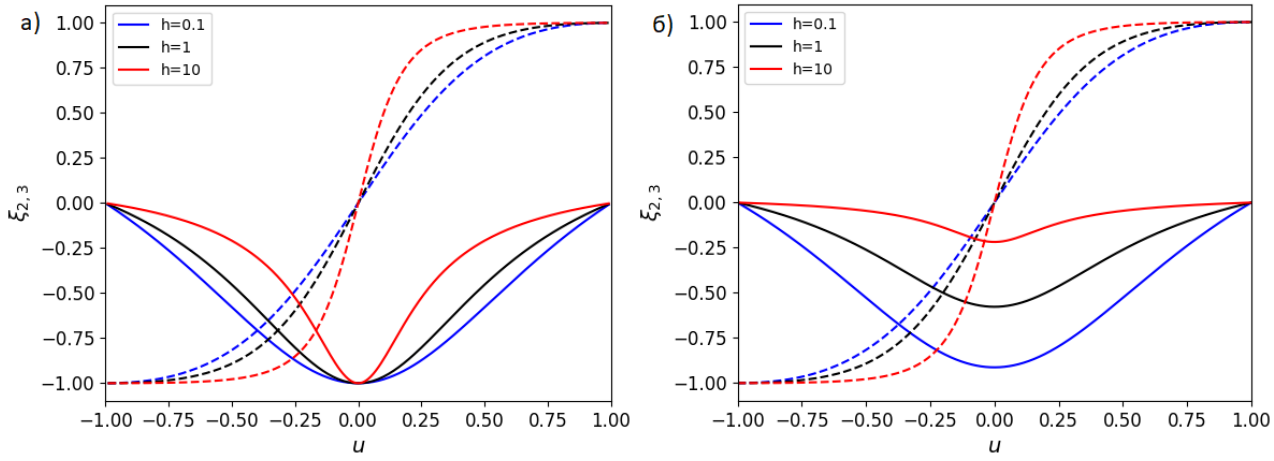


Рис. 1. Залежність поляризації випромінювання від кута вильоту для різних значень магнітного поля (штрихова лінія відповідає ξ_2, а суцільна – ξ_3), коли а) μ = -1 та б) неполяризований випадок.

[1] H.P. Schlenvoigt, T. Heinzl, U. Schramm et al., Phys. Scr. 91, 023010 (2016).
[2] O. Tesileanu, D. Ursescu, R. Dabu, N. Zamfir, J. Phys.: Conf. Ser. 420, 012157 (2013).
[3] R.P. Mignani, V. Testa, D.G. Caniulefet et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 465, 492 (2017).
[4] A.K. Harding, R. Preece, The Astrophysical Journal 319, 939 (1987).

PROPAGATORS FOR NEGATIVE-ENERGY AND TACHYONIC SOLUTIONS OF RELATIVISTIC EQUATIONS

Valeriy V. Dvoeglazov

UAF, Universidad Autonoma de Zacatecas, Mexico
e-mail:valeri@fisica.uaz.edu.mx

It is well known that the relativistic equations have acausal solutions which generally have been ignored. Particularly, this is true for higher spins. We consider spin ½ and spin1 in this talk. We calculated correspondíng propagators which indicate if a theory is local or non-local. Tachyons and negative-energy solutions are also considered.. The conclusiones are paradoxical in both cases.

РОЗРАХУНКИ СТРУКТУРИ АТОМА ВАНАДІЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ТЕРМУ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ОРБІТАЛЕЙ

С.В. Гедеон, В.Ю. Лазур, А.А. Кочемба

ДВНЗ "Ужгородський національний університет", Ужгород
e-mail: sergej.gedeon@uzhnu.edu.ua

Дослідження спектроскопічних характеристик та структури атомної системи ванадію становить значний інтерес для багатьох галузей прикладної та фундаментальної науки.

Із зарядом ядра $Z = 23$ та конфігурацією основного стану $[\mathrm{Ar}]3d^3 4s^2$ ванадій належить до так званих перехідних елементів і має незаповнену *d*-оболонку. Атомні структури, які мають відкриті оболонки з декількома еквівалентними *d*-електронами, представляють особливий інтерес для теоретичного вивчення, оскільки саме системи цього типу демонструють характеристики, проміжні за складністю між добре вивченими *s*- і *p*-елементами та дуже складними рідкісноземельними елементами, в структурах яких переважають конфігурації з *f*-електронами.

Застосування різних *ab initio* методів для вивчення електронної структури перехідних металів показало всю складність таких систем і важливість врахування електронної кореляції. Всебічне дослідження електронної структури атомів перехідних металів має вирішальне значення для вивчення електронної структури молекул і комплексів перехідних металів, оскільки багато атомних станів, ймовірно, беруть участь у формуванні хімічних зв'язків через близьку відстань між атомними мультиплетами, утвореними майже виродженими 3*d* і 4*s* електронами [1].

Для розрахунку хвильових функцій основного та збуджених станів атома ванадію нами було застосовано багатоконфігураційний метод Хартрі-Фока (MCHF) [2] у поєднанні з методом конфігураційної взаємодії (CI) [3, 4], що використовує неортогональні орбіталі та *B*-сплайни як базисні функції. Цей підхід дозволяє гнучко і ефективно враховувати залежність від терму валентних орбіталей, ефекти кореляції та релаксації. Використання неортогональних орбіталей, зокрема, дозволяє значно зменшити кількість конфігурацій у багатоконфігураційних розкладах [5]. Така ефективність досягається також шляхом правильного відбору домінуючих конфігурацій з сотень чи тисяч окремих атомних конфігурацій, утворених усіма можливими одно- та

двохелектронними збудженнями валентних 3*d*, 4*s* і 4*p* орбіталей розглядуваної конфігурації. Аналізуючи повні конфігураційні розклади для кожного розглядуваного терму і вибираючи лише конфігурації зі значними коефіцієнтами розкладу можна отримати остаточні багатоконфігураційні розклади, що включають усі важливі електронні кореляції і в той же час мають контрольований розмір, що є важливим для подальших розрахунків параметрів розсіяння.

Іншим важливим аспектом дослідження було врахування залежності від терму одноелектронних орбіталей. Так, для розрахованих нами хвильових функцій середній радіус орбіталі 3*d* дорівнював 1.88, 1.56, 1.51, 1.35 та 1.34 ат.од. для конфігурацій $3d^5$, $3d^4 4s$, $3d^4 4p$, $3d^3 4s^2$, і $3d^3 4s 4p$, відповідно.

В результаті проведених розрахунків нами було отримано хвильові функції основного та 44 збуджених станів нейтрального атома ванадію, які відповідають конфігураціям $3d^3 4s^2$, $3d^4 4s$, $3d^3 4s 4p$, $3d^5$ та $3d^4 4p$ термів $^{2,4}PDFGH^2I^6SD$ і $^{2,6}S^{4,6}PDFG^o$.

Для багатоконфігураційних розкладів кожного з п’яти типів розглянутих електронних конфігурацій ($3d^3 4s^2$, $3d^4 4s$, $3d^3 4s 4p$, $3d^5$ і $3d^4 4p$) було досліджено основні кореляційні внески.

Конфігурації з коефіцієнтами змішування, меншими за 0.001, були видалені з кінцевих CI-розкладів. Такий параметр відсікання забезпечив CI-розклади розміром від ~30 до ~650 конфігурацій для розглядуваних станів у *LS*-наближенні. Вважається, що цього достатньо для включення основних кореляційних ефектів з відносно невеликою кількістю конфігурацій. Розраховані енергії збудження задовільно узгоджуються з усередненими за рівнями тонкої структури експериментальними значеннями [6] з середнім відхиленням ~0.5 еВ.

Попри лише задовільне узгодження розрахованих енергій збудження з наявними експериментальними даними, важливо відзначити в цілому добре узгодження для різниці між енергіями збудження різних станів. Тобто взаємне розміщення розрахованих рівнів енергії для більшості збуджених станів нейтрального атома ванадію відповідає тому, що спостерігається на експерименті. Це відіграє важливу роль при подальшому вивченні процесів переходу між рівнями з використанням розрахованих хвильових функцій.

Насамкінець, ми отримали залежні від *J* стани шляхом діагоналізації гамільтоніана Брейта-Паулі в базисі багатоконфігураційних *LS* хвильових функцій, описаних вище, використовуючи метод взаємодії конфігурацій та неортогональні орбіталі [3]. В даних розрахунках ми включили всі “одночастинкові” оператори Брейта-Паулі: релятивістську поправку для маси, одночастинковий оператор Дарвіна та оператор спін-орбітальної взаємодії. Це

дозволило отримати відповідний енергетичний спектр з врахуванням тонкого розщеплення рівнів.

Одержані набори хвильових функцій можуть бути використані в подальших розрахунках низькоенергетичного розсіяння електронів на атомі ванадію та процесів фотоіонізації.

[1] M.C. Bohm, J. Phys. B: At. Mol. Phys. 17, 3103 (1984).
[2] C. Froese Fischer et al., Comput. Phys. Commun. 176, 559 (2007).
[3] O. Zatsarinny, C. Froese Fischer, Comput. Phys. Commun. 124, 247 (2000).
[4] O. Zatsarinny, C. Froese Fischer, Comput. Phys. Commun. 180, 2041 (2009).
[5] A. Hibbert et al., Comput. Phys. Commun. 51, 285-293 (1988).
[6] Kramida, A., Ralchenko, Yu., Reader, J., and NIST ASD Team (2022). NIST Atomic Spectra Database (ver. 5.10). Available: https://physics.nist.gov/asd.

MOLECULAR GRAPH THEORY OF PROBLEMS OF RADIATION MODIFICATION OF BIOORGANIC MOLECULES

V. Hanulych

Institute of Electronic Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Uzhhorod
e-mail: hanulychvitalij@gmail.com

The main task of molecular graph theory is to represent the topological structure of a molecule in the form of a single number, which would be unique for a given topology and reflect either the energy of the molecule as a whole or its orbitals, its spatial or electronic structures. It is expected that such numbers will also correlate with the physical and chemical properties of the corresponding molecules and will help to identify theoretically possible topologies of molecules that have not yet been discovered practically. [1]

Molecular graph theory also has applications in studying the transformation of bioorganic molecules under the influence of radiation. For this purpose, the concept of colored sets of atoms is introduced, which determines the nature of the structural arrangement of their molecules and the configurational entropy. [2]

Under the influence of radiation, bioorganic molecules can randomly disintegrate and form new bonds. Therefore, it is important to study all possible structural combinations of a particular molecule and to model those topologies that could exist in real conditions. For this, the “ball-and-stick” representation model is used, where each atom is considered as a separate object that can attach other similar elements to itself. In other words, the so-called “Lego principle” is used, i.e., the arbitrary assembly of molecules from atoms as from construction blocks. The maximum possible number of attached atoms is determined by the atom valence. In this way, a molecular graph is formed, where atoms act as vertices, and bonds between atoms act as edges of the graph. It is important to note the following facts:

1) an atom cannot be connected to itself, so the edges of the molecular graph are not loops
2) all bonds must be saturated; there should be no vacancies in atoms
3) the set of atoms connected to the current atom determines the color of this atom

There are two ways to study the possible topologies of a molecule. Using the first method involves working with half-bonds. First, a set of all half-bonds existing in the molecule is formed, after which an arbitrary pair of unused elements of this set is selected and connected. This action continues by recursion. When all items of the set of half-bonds have already been used, the corresponding colored sets of atoms are formed from the formed topology. Then, the last pairs of half-bonds are disconnected, and we search for an alternative connection. After going through all possible combinations of connections, we get sets of colored sets of atoms at the output, and

these sets demonstrate theoretically permissible topologies of the molecule under consideration.

When using another method, a set of all possible colored sets for a given molecule is first formed. Then, having designated the types of bonds between atoms by certain variables, we create a system of equations that will relate the number of bonds of one kind or another to the number of atoms of the corresponding colored sets that use this type of bond. The resulting system of equations serves as a filter for filtering out those combinations of colored sets that cannot form a molecule due to internal contradictions. By applying this filter while going through all possible combinations of colored sets, we also get theoretically permissible topologies of the molecule at the output.

The difference between the first and second methods is that when using the first method, we work with «bare» atoms, assigning them colored sets already during the algorithm execution. Instead, in the second method, each atom receives its identifier in the form of a color set even before the program starts, and only then do we filter out those combinations that do not suit us using equations. However, it is advisable to use both methods at once. After all, using a system of equations, we can finally make sure of the possibility of the existence of topologies obtained by recursively connecting half-bonds, and working with half-bonds provides us with additional information necessary for a better understanding of a particular topology.

After collecting data on the topology of the molecule, each of them can be visualized in two-dimensional (if the corresponding topology graph is planar) or three-dimensional space. We also can convert information about the spatial structure of the molecule into images by using the tools and means of the Unity platform and the C# programming language. A correspondence is established between the ready-made atom models and the corresponding molecular graph vertices by using a separate algorithm. For this, all the vertices of the molecular graph are numbered, after which numbers begin to be assigned to the atom models in the program. The atom model must be of the same type (Carbon, Oxygen, etc.) as the corresponding vertex of the molecular graph. After that, the atom models are connected based on the data obtained during the phase of research possible topologies.

Thus, we have the opportunity to recreate all possible variants of modification of bioorganic molecules under the influence of radiation and to visualize theoretically permissible topologies. The current study may also contribute to the development of molecular graph theory, as analyzing additional properties of different topologies may accelerate the search for a single number to characterize them.

[1] Estrada, E.; Bonchev, D. Section 13.1. Chemical Graph Theory. In Handbook of Graph Theory, 2nd ed.; Gross, J.L., Yellen, J., Zhang, P., Eds.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2013; pp. 1538-1558

[2] V. Maslyuk; A. Zavilopulo; V. Hanulych; N. Svatyuk; O. Pop; O. Simkanich. Computer 3D modeling bioorganic compounds: How the amino acids can be created? AIP Conf. Proc. 2872, 090004 (2023)

СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРИЧАСТИНКОВИХ ЕКЗОТИЧНИХ МОЛЕКУЛЯРНИХ ІОНІВ З АТОМІВ КИСНЮ, ОБЧИСЛЕНІ В ОДНОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

М. І. Гайсак

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: mykhaylo.haysak@gmail.com

Проведено розрахунки спектроскопічних параметрів тричастинкових екзотичних молекулярних іонів з атомів кисню, які складаються із частинок та анти-частинок $\left[O^{+8}e^{\pm}\overline{O^{+8}}\right]$. Гамільтоніан розглядуваної системи є інваріантним відносно заміни всіх частинок на їх античастинки, тому в обох випадках ми одержуємо однакові параметри.

Розрахунки виконано у рамках нерелятивістської квантово-механічної моделі задачі трьох тіл, яка ґрунтується на відносних колективних змінних Якобі [1]. В даному випадку для знаходження частинних розв'язків нерелятивістського рівняння Шредінгера (НРШ) від трьох незалежних змінних задачу зведено до розв'язування двох крайових задач: знаходження адіабатичних потенціалів $U_v(R)$ та значень енергій (ε) основних і збуджених станів парно-парної серії (ее) даної системи.

Розрахунок екстремальних точок адіабатичного потенціалу, що визначаються парними (even) базисними функціями {1, cos(4α)}, показує, що глибина потенціальної ями $|U_v(R)|$ даної серії $-4.78358991953343\times10^{17}$ a.u. досягається у точці $r = 1.1920928955078\times10^{-8}$ a.u.

Позитивні іони $\left[O^{+8}e^{+}\overline{O^{+8}}\right]$, притягуючи негативні іони $\left[O^{+8}e^{-}\overline{O^{+8}}\right]$, утворюватимуть нейтральні молекули виду $\left[O^{+8}e^{\pm}\overline{O^{+8}}\right]_2$, тобто є шестичастинковими системами (нейтральними молекулами) [2]. Значення енергій основних та збуджених станів розглянутих систем лежать в діапазоні ~$[-2.721160000\times10^{11}, -1.850388528\times10^{17}]$ eV (див. таблицю 1).

Таблиця 1

Розрахунки спектральних характеристик серії (ее) молекулярних екзотичних систем з атомів кисню $\left[O^{+8}e^{\pm}\overline{O^{+8}}\right]$ (для ε_{00}) та $\left[O^{+8}e^{\pm}\overline{O^{+8}}\right]_2$ (для ε_{0i}, i=1-4)

Стани	Енергія станів (eV)	Інтервал радіал. змін. (a.u.)	Середній радіус для стану (a.u.)	Середній радіус системи (m)
ε_{00}	$-1.850388528\times10^{17}$	$[0, 1.51\times10^{-10}]$	$5.2\cdot10^{-11}$	-
ε_{01}	$-8.498182680\times10^{15}$	$[0, 4.78\times10^{-10}]$		1.5341×10^{-20}
ε_{02}	$-1.632668788\times10^{15}$	$[0, 1.13\times10^{-9}]$		3.3856×10^{-20}
ε_{03}	$-1.088464000\times10^{13}$	$[0, 2.2\times10^{-9}]$		8.9930×10^{-20}
ε_{04}	$-2.721160000\times10^{11}$	$[0, 3.87\times10^{-9}]$		1.5870×10^{-19}

Слід зауважити, що серед цих молекул найбільша енергія зв'язку одержана для основного стану: 1.85×10^{17} eV, а збуджені стани молекули мають значно менші енергії зв'язку. Такі надзвичайно великі енергії мають космічні промені, зокрема, відкрита у 2023 році рідкісна частинка з космічних променів, яка дісталася Землі. Енергія цієї частинки (Amaterasu particle) становить 2.4×10^{20} eV, і поступається лише частинці «Oh-My-God particle», енергія якої сягає 3.2×10^{20} eV [3].

На рисунках 1 та 2 представлені графіки хвильових функцій першого та другого рівнів молекули $\left[O^{+8}e^{\pm}\overline{O^{+8}}\right]_2$ з екзотичними атомами кисню.

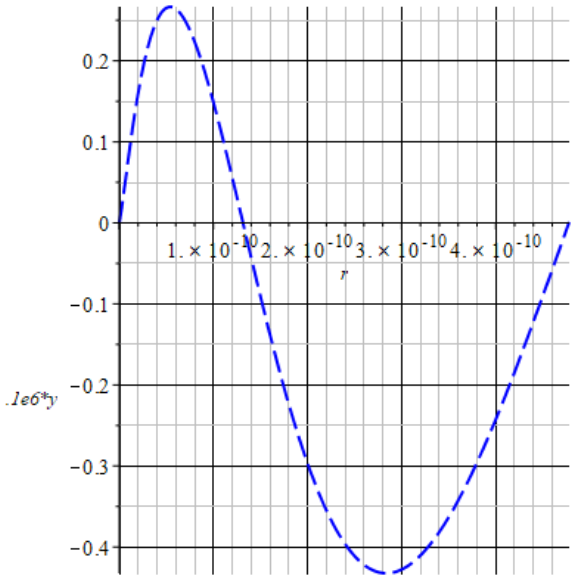


Рис. 1. Радіальна хвильова функція шестичастинкової молекули кисню (ее) серії. Збудження резонансного рівня (першого).

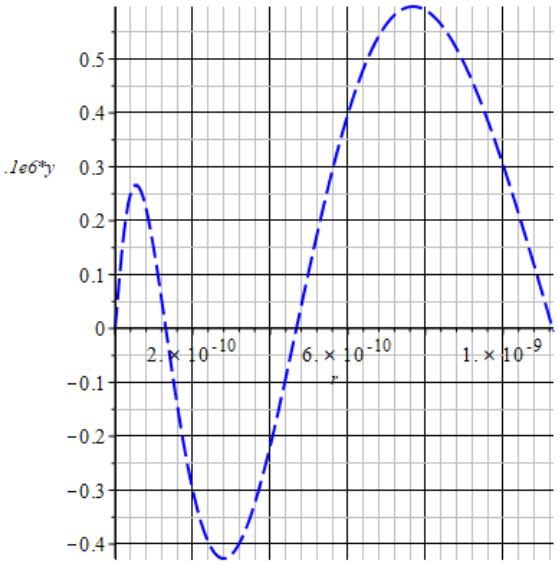


Рис. 2. Радіальна хвильова функція шестичастинкової молекули кисню (ее) серії. Збудження 2-го рівня.

Отже, застосування тричастинкового квантово-механічного підходу та проведені чисельні розрахунки дозволяють припустити існування шестичастинкових нейтральних молекул кисню, величина енергії зв'язку яких коливається в межах від -2.72×10^{11} eV до -1.85×10^{17} eV залежно від рівня збудження.

[1] Haysak M.I., Haysak I.I., Nagy M., Onysko V.V., Acta Physica Polonica A, 142 (4), 549-552 (2022); Doi: 10.12693/APhysPolA.142.549. http://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/PDF/142/app142z4p14.pdf.
[2] Wolfe J. & Mysyrowicz A. Excitonic Matter. Scientific American, 250(3), 98-107 (1984) Retrieved October 12, 2020, from http://www.jstor.org/stable/24969326.
[3] Елиїв А.А., Гнатик Б.І., Кінематика і фізика небесних тіл, Т.22 (4), 297-307 (2006). https://www.mao.kiev.ua/biblio/jscans/kfnt/2006-22/kfnt-2006-22-4-06.pdf.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА КВАНТОВО-МЕХАНІЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЕПЛОТРАНСПОРТУ НА ПРИКЛАДІ ПРОСТИХ КРИСТАЛІВ І КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Ю.В. Горбатенко, О.І. Кривчіков, О.О. Романцова, О.О. Королюк

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків
e-mail:horbatenko@ilt.kharkov.ua

Відомо, що теплопровідність матеріалу залежить від структури та типу впорядкування атомів у цьому матеріалі. За характером температурних залежностей теплопровідності, їх умовно поділяють на кристалоподібні та склоподібні. Для кристалоподібної поведінки теплопровідності характерною ознакою в координатах $\kappa(T)$ є наявність дзвоноподібного максимуму в низькотемпературній області, що плавно переходить в обернено-пропорційне зменшення теплопровідності зі зростанням температури. Зліва від максимуму теплопровідності мають місце процеси розсіяння фононів на різноманітних дефектах кристалічної ґратки матеріалу (границі, домішки). Для розупорядкованих систем (аморфні, орієнтаційно-розупорядковані кристали) теплопровідність демонструє склоподібну поведінку: її значення є нижчим, ніж у кристалічного аналога, і коли температура підвищується від найнижчих температур, спочатку крива $\kappa(T)$ демонструє квадратичну залежність від температури (від найнижчих температур і до ≈ 2 K), потім в діапазоні температур $\approx 5 \div 10$ K виникає плато теплопровідності, після якого спостерігається плавне зростання $\kappa(T)$.

Зазвичай для опису теплопровідності впорядкованих твердих тіл використовується модель фононного газу, де основними теплоносіями є газ квазічастинок − фононів. В той же час, для представлення теплопровідності розупорядкованих і аморфних матеріалів використовують різноманітні феноменологічні моделі, такі як стандартна тунельна модель, модель м'яких потенціалів, модель Кахілла-Поля, модель Алена-Фельдмана та ін. [1]. Однак у роботі [2] автори представили принципово нову теорію, засновану на квантово-польовому підході для опису теплового транспорту (узагальнена теорія теплотранспорту Simoncelli-Marzari-Mauri), яка дозволяє описати теплопровідність твердих тіл як в упорядкованому, так і у розупорядкованому станах. Основна ідея цієї теорії полягає в тому, що коливальні збудження можуть поширюватися не тільки як квазічастинки, але також вони можуть тунелювати між спареними енергетичними станами, тобто, в будь-якому твердому тілі теплотранспорт здійснюється двома шляхами – квазічастинковий теплоперенос та хвильове тунелювання коливальних збуджень.

У даній роботі ми представляємо процедуру обробки та аналіз даних теплопровідності молекулярних твердих тіл для експериментальної перевірки

положень і передбачень теорії теплотранспорту Simoncelli-Marzari-Mauri. Показано, що наш метод розрахунку забезпечує універсальні аналітичні залежності для опису теплопровідності будь-якого твердого тіла, в тому числі систем з наднизькою теплопровідністю в рамках єдиного універсального підходу. Апробація нашого методу була виконана на прикладі різноманітних кристалічних і аморфних матеріалів, таких як молекулярні, напівпровідникові, металоорганічні, клатратні сполуки, полімери тощо в широкому діапазоні температур. Показано, що в таких матеріалах тунельний внесок у теплопровідність зростає з температурою, а в деяких випадках навіть стає домінуючим. Отримана інформація має фундаментальний і прикладний аспекти і може бути використана в різних галузях матеріалознавства.

Вдячність: робота виконана за підтримки Національного фонду України (проєкт № 2023.03/0012).

[1] A.I. Krivchikov, et al., Materialia 32, 101944 (2023).
[2] M. Simoncelli, N. Marzari, & F. Mauri, Nature Physics, 15(8), 809-813 (2019).

"CHROMOSOME TEST" FOR METALLICITY AND UNIVERSALITY IN SIZE-DRIVEN EVOLUTION TOWARDS BULK POLARIZABILITY OF METALS

J. Jellinek

Argonne National Laboratory, Lemont, Illinois 60439, USA
e-mail: jellinek@anl.gov

The properties of finite systems in the sub-nano and nanoscale size regimes are very different from those in the bulk limit. For example, small atomic clusters of nominally metallic elements (i.e., elements that are metals in bulk quantities) do not possess any characteristics usually associated with the bulk metallic state. These characteristics then grow in as the clusters grow in size. How does this process of the size-driven evolution towards metallic attributes take place? Does it follow some common trends for different metallic elements or is it element-specific? In the case of a cluster of an arbitrary unidentified element, how large should it grow to allow for prediction of whether it will be a metal or a nonmetal in the bulk limit? Is such a prediction at all possible before actually reaching the bulk limit?

These fundamental questions will be addressed and answered using polarizability as a descriptor that allows for identification of bulk systems as metallic or nonmetallic through the manner in which they respond to an external electric field. The response in nonmetals is polarization that results in the reduction of the field in the interior of a nonmetallic system. In metals, the field induces charge transfer that leads to the expulsion of the field from the interior of a metallic system. How do finite systems respond to an external electric field and what are the implications of this response for characterization of the metallic vs nonmetallic identity and characteristics of these systems?

To answer these questions, we employ the methodology of the atomic-level analysis of the dipole moments and polarizabilities of finite systems [1]. Specifically, we show that this methodology allows for decomposition of the total polarizability of a finite system into the so-called *local, or dipole,* and *charge-transfer* components. The dipole component of the total polarizability characterizes the nonmetallic type of response of the system, whereas the charge-transfer component gauges its metallic type of response. As long as both have nonzero values, the system is neither a metal nor a nonmetal.

To explore the size-evolution of the total polarizabilities and their dipole and charge-transfer components in metallic elements, we performed extensive density functional theory (DFT) based calculations on clusters of Na, K, Al and Zn with up to 146 atoms [2]. Na and K were chosen as representatives of alkali metals, Al as a representative of *s-p* type metals, and Zn as a representative of transition metals. The analysis of the accumulated data revealed some fascinating behavior. In all four cases, the charge-transfer component evaluated on the per-atom basis showed in initial rapid

increase with the increase of the cluster size and then a saturation levelling off that started at the very small size of about 25 atoms. Remarkably, the saturation value for each element agrees with the magnitude of its corresponding bulk polarizability. This means that the metallic identity of each metallic element is inherent in it from the very small sizes at which none of its characteristics is yet in agreement with those of its bulk metallic state. The dipole component of the total polarizability evaluated on the per-atom basis decreases for each of the four elements with the increase of the cluster size and is extrapolated to go to zero. As a consequence, only the charge-transfer component survives as the clusters grow in size, and the element "reveals" its full metallic identity.

Another remarkable (and surprising at first sight) finding is that the rate of the size-driven approach to metallicity - as gauged by a quantity we call degree of metallicity - is the same for all four metals. We developed an analytical model that explains this finding and points to its universal nature. Test studies on clusters of nonmetallic elements indicated that the size-dependent behavior of the dipole and charge-transfer components of their total polarizabilities is different from that described above for metallic elements. Consequently, an analysis of the size-evolution of the dipole and charge-transfer components of the total polarizability of a cluster of an unidentified element over a limited range of small sizes of a few tens of atoms allows for an unambiguous identification of the nature of the element. If the value of its charge-transfer component per atom does not level off to a constant, the element is a nonmetal; if it does level off, the element is a metal. Moreover, in the latter case, the chemical identity (name) of the element can be established by matching the magnitude of its levelled off charge-transfer component to a value in the table that lists the bulk polarizabilities of metals. This use of the charge-transfer component as a tool for very "early" (at a level of just a few tens of atoms) identification of an unidentified element as a future bulk metal or nonmetal can be viewed as a "chromosome test" for metallicity that mimics the ability of the true chromosome test to identify the biological gender (male or female) of a future newborn as early as 6 weeks after fertilization of the egg.

[1] K.A. Jackson, M. Yang, J. Jellinek, J. Phys. Chem. C 111, 17952 (2007).
[2] J. Jellinek, K.A. Jackson, Nanoscale 10, 17534 (2018).

---

* This work was supported by the Office of Basic Energy Sciences, Division of Chemical Sciences, Geosciences and Biosciences, U.S. Department of Energy under Contract No. DE-AC02-06CH11357.

КОГЕРЕНТНІ СТАНИ ОДНОРІДНОЇ ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА

І. Качурик, І. Гула

Глухівський національний педагогічний університет імені О. Довженка, Глухів
Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна
e-mail: kachurykivan@gmail.com, hulaih@khmnu.edu.ua

У роботі ставиться задача побудови і послідовного вивчення властивостей уведеної в [1] системи когерентних станів (КС) для однорідної групи де Сіттера $SO(1, 4)$. Метод когерентних станів став невід'ємною частиною в арсеналі математичних засобів сучасної теоретичної фізики. Цей метод виник і почав розвиватися зразу після створення квантової теорії. Такі стани – нерозпливні хвильові пакети для гармонічного осцилятора – будувались і досліджувались ще Шредінгером (1926 р.) для виявлення зв'язку між класичним і квантовим описаннями. У даний час вони використовуються майже в усіх областях фізики.

Виявилось, що КС тісно пов'язані з групами. Так, уже звичайні КС, які вперше були уведені в оптику, зв'язані з групою Гайзенберга, і їх найважливіші властивості отримуються з допомогою цієї групи [2, 3]. Саме завдяки груповому підходу до усієї тематики КС, значно зміцнився базовий рівень методу КС і помітно розширилась область його застосувань, зокрема, у квантовій теорії поля, квантовій оптиці, теорії магнетизму і в фундаментальних питаннях самої квантової механіки. Значною мірою це пояснюється також і особливостями самих КС. Визначальним є те, що КС $| z >$ – це функції неперервної змінної – комплексного числа z, а не набір власних векторів повного набору взаємокомутуючих операторів. Було встановлено також, що КС – це лінійно не незалежні, переповнені системи векторів, не ортогональні один одному у просторі станів. Але якраз ця їх незвичайність відкрила цілий ряд можливостей. Крім того, у багатьох випадках КС, як квантові стани, дозволяють спрощувати квантову задачу, використовуючи наглядну класичну мову, оскільки володіють мінімальними невизначеностями.

Метод КС особливо ефективний, коли зв'язана з ним група є групою динамічної симетрії. Група Гайзенберга – найпростіший приклад такої групи (для квантового осцилятора, що знаходиться під дією змінної зовнішньої сили). Але вона не універсальна: у багатьох задачах зустрічаються інші, більш складні групи. Наприклад, у задачі про прецесію спіна у змінному магнітному полі з'являється некомпактна група $SU(1, 1) \sim SL(2, R)$. Переломовим [2] поняття КС було узагальнено на довільну групу Лі. При цьому властивості КС тісно пов'язуються з теорією представлень груп (див. також [3]). Вони задаються точками в однорідних просторах, у яких діє група.

У роботі [2] проводиться систематичний виклад теорії КС, особливо для нижчих груп. Детально вивчається також система КС для групи $SO(1, n)$ і

детальніше – для груп Лоренца $SO(1, 2)$ і $SO(1, 3)$. У такому ж плані у даній роботі досліджується система КС для групи $SO(1, 4)$. У динамічному аспекті $SO(1, 4)$ відома у фізиці, як динамічна група симетрії нерелятивістського атома водню. Тому природно виникає проблема розробки для неї теорії КС з метою подальшого активного впровадження її у фізичну проблематику.

Систему КС для розглядуваної групи конструюємо для максимально виродженої неперервної серії унітарних представлень. При цьому сама група SO(1, 4) виступає у ролі групи рухів 4-вимірного простору Лобачевського $L^{(4)}$, який реалізується, як поверхня верхньої порожнини двопорожнинного 4-вимірного гіперболоїда $H^{(4)}$ в (1+4)-вимірному просторі Мінковського.

Когерентні стани параметризуються точками простору $L^{(4)}$. Ретельно аналізуються отримані в [4] результати з гармонічного аналізу на $L^{(4)}$ і на цій основі вивчаються властивості $SO(1,4)$ – КС. Зокрема, проводяться розклади КС по базисних функціях незвідних унітарних представлень класу 1 групи $SO(1, 4)$. Функції, за якими йде розклад скалярної «хвильової функції» у декартовій системі координат, представляють собою $SO(1, 4)$ – КС. Вони інтерпретуються як «плоскі хвилі» (називатимемо їх орисферичними хвилями), оскільки в евклідовій границі вони стають звичайними плоскими хвилями. Встановлюємо для них диференціально-різницеве рівняння – аналог вільного рівняння Шредінгера в релятивістській області.

Показано, що КС не ортогональні один до одного. Їх скалярний добуток виражається через зональні $SO(1, 4)$ – сферичні функції, зв'язані з приєднаними функціями Лежандра 1-го роду. Вводимо в розгляд конфігураційний простір, «канонічно спряжений» імпульсному простору $L_{\tilde{p}}^{(4)}$; приводяться у явному вигляді генератори трансляцій цього простору – оператори імпульсів $\tilde{p}$. Знайдено, що спільний спектр цих операторів співпадає з кривим $\tilde{p}$-простором де Сіттера $L_{\tilde{p}}^{(4)}$, а їх спільною власною функцією є орисферична хвиля. Досліджується також задача розсіяння, тісно переплетена з досліджуваними КС групи $SO(1, 4)$. Знайдена у явному вигляді відповідна парціальна S-матриця.

[1] И.И. Качурик. Об аналоге преобразования Шапиро в пятимерном подходе: Препр. / АН Украины. Ин-т теорет. физики; ИТФ-76-98Р. – К.: 1976. – 23с.
[2] А.М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. – М.: Наука, 1987. – 270с.
[3] И.А. Малкин, В.И. Манько. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
[4] А.У. Климык, И.И. Качурик. Вычислительные методы в теории представлений групп. – К.: Вища школа, 1986. – 224с.

LONG-RANGE INTERACTION IN HIGHLY EXCITED DIATOMIC SYSTEMS

Mykhaylo Khoma

Institute of Electron Physics NAS of Ukraine, Uzhhorod
e-mail: khomamv@nas.gov.ua

The accurate study of the highly excited quasimolecular system H_2^+ continue to attract attention due to the prospects they offer for calculation of the long-range potential energy curves (PECs) for more complex Rydberg dimers [1]. For instance, the so-called generalized local frame transformation theory would use the states of H_2^+ as a starting point for description of some long-range homonuclear Rydberg molecules (see [2] and references therein). It has been shown already in the 1950s that accurate long-range energies of H_2^+ cannot be obtained with perturbation theory [3,4].

In the present work we report quantum-mechanical calculations for energies of high-lying $^2\Sigma$ states of H_2^+ which exhibits the expected sequences of avoided crossings [1,5] of the PECs. For this problem spheroidal coordinates were used which allow to separate the variables in the corresponding electronic Schrödinger equation. Each electronic state is characterized by a set of angular, radial, and azimuthal quantum numbers (numbers of nodes) {*q*, *k*, *m*} [1,5,6]. The principal quantum number of the state is given as $q+k+m+1$. Avoided crossings for selected high-lying states with $k=0$ are shown in Figures 1 and 2. In the figures 1 and 2 we plot the value n_{eff} $[=(-2/\varepsilon)^{1/2}]$ as a function of the internuclear distance *R* (here ε is the pure electronic energy). All values are given in atomic units (au). The ridge of avoided crossings is clearly observed between gerade states {*q*, *0*, *0*} and {*q-2*, *0*, *0*}.

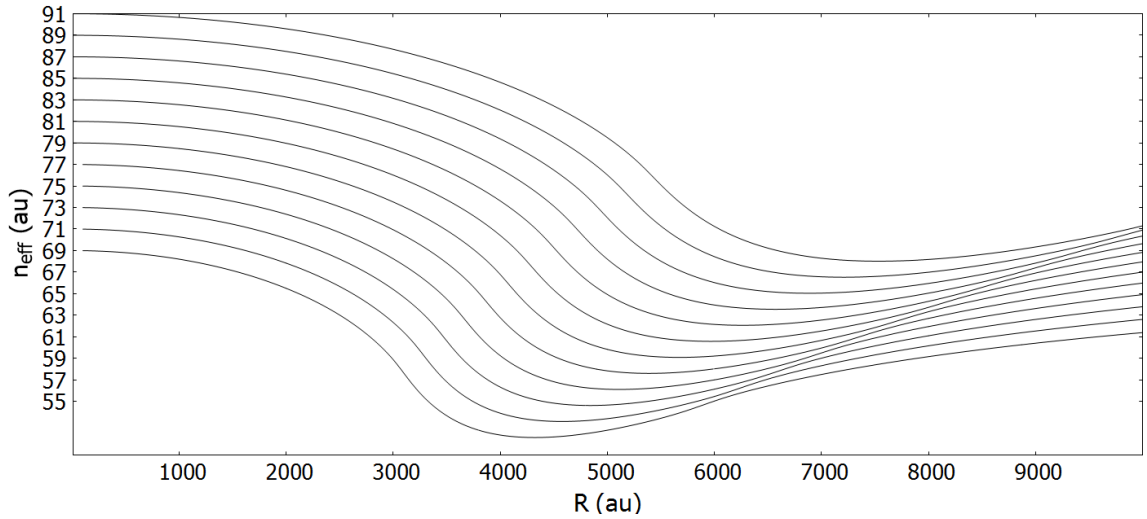


Fig. 1. The sequence of avoided crossings for $^2\Sigma$ states of H_2^+ with $k=0$ and q=68-90.

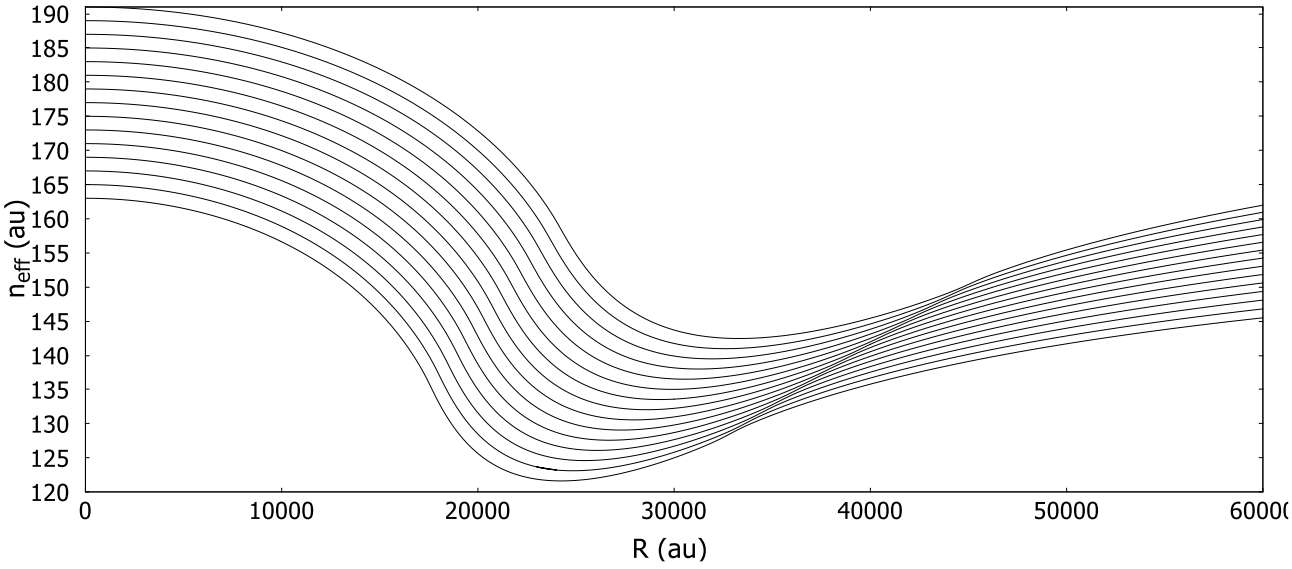


Fig. 2. The same as in Fig. 1 but for q=162-190.

The results of the present calculations plotted in figures 1 and 2 are in good agreement with the results reported in [1].

[1] T.J. Price, C.H. Greene, J. Phys. Chem. A 122, 8565 (2018).
[2] P. Giannakeas, C.H. Greene, F. Robicheaux, Phys. Rev. A 94, 013419 (2016).
[3] A. Dalgarno, J.T. Lewis, Proc. Phys. Soc., London, Sect. A 69, 57 (1956).
[4] P.D. Robinson, Proc. Phys. Soc., London 78, 537 (1961).
[5] J.M. Rost, J.S. Briggs, P.T. Greenland, J. Phys. B 22, L353 (1989).
[6] J. D. Power, Phil. Trans. R. Soc. A 274, 663 (1973).

ВИВЧЕННЯ ВПЛИВУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕМПЕРАТУРНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ПСЕВДОЩІЛИНИ У ОПТИМАЛЬНО ДОПОВАНИХ ПЛІВКАХ YBa2Cu3O7–δ

А. С. Колісник[1], Є. В. Петренко[1], А. В. Терехов[1], Л. В. Блудова[1], К. Рогацький[2], А. Л. Соловйов[1,2]

[1] *Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 61103, Україна*
[2] *Інститут низьких температур і структурних досліджень ПАН, Вроцлав, 50-422, Польща*
e-mail: kubandrey606@gmail.com

З моменту відкриття високотемпературної надпровідності (ВТНП) у 1986 році досі немає єдиної теорії, яка б пояснювала механізм надпровідного спарювання вище 100 К. Фактично, це є серйозним викликом для сучасної фізики твердого тіла, особливо з огляду на пошук нових матеріалів зі ще вищими критичними температурами (T_c) близькими до кімнатних. Вважається, що вивчення такого явища, як псевдощілина, що спостерігається у купратах при $T^*>T>T_c$, зможе надати ключову інформацію для повноцінного розуміння явища ВТНП [1].

У роботі проаналізовано зміну температурної залежності псевдощілини $\Delta^*(T)$ в плівках $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ (YBCO) [2] з T_c = 88,7 K (B = 0) під впливом магнітного поля B до 3 Тл, що орієнтоване перпендикулярно до провідної площини *ab*. Було з'ясовано, що для різних значень B форма $\Delta^*(T)$ від температури відкриття псевдощілини T^* до температури T_{01}, нижче якої спостерігаються надпровідні флуктуації, має широкий максимум при температурі кросовера БЕК–БКШ $T_{pair} \approx 140$К, яка є типовою як для плівок, так і для монокристалів YBCO. Величина $\Delta^*(T_{pair})$ під впливом магнітного поля зберігається, тоді як сама T_{pair} зсувається в сторону нижчих температур зі зростанням B. Зі збільшенням магнітного поля, низькотемпературний максимум поблизу температури $T_0 > T_c$, нижче якої флуктуаційна провідність переходить з режиму 2D Макі-Томсона до 3D Асломазова-Ларкіна, поступово розмивається і зникає при B > 1 Тл. Вище температури Гінзбурга T_G, яка обмежує область критичних флуктуацій, у випадку B > 0,5 Тл з'являється мінімум на $\Delta^*(T_{min})$, який стає доволі вираженим із подальшим збільшенням поля.

Поведінка співвідношення $2\Delta(0)/k_BT_c = 2\Delta^*(T_G)/k_BT_c$ [1] має особливості: у полі B = 1 Тл воно зменшується зі свого постійного значення 5,0, типового для

YBCO, до 4,9. Проте, починаючи з B =2 Тл, навпаки дещо зростає та, врешті решт, вище 3 Тл включно знову стає 5,0. Оскільки магнітне поле явно не впливає на R(T) за високих T, виявлені особливості можна пояснити взаємодією магнітного поля з локальними парами, що виникають у ВТСП при $T < T^*$ [1].

[1] A. L. Solovjov and V. M. Dmitriev, Low Temp. Phys. 35, 169 (2009).
[2] E. V. Petrenko, K. Rogacki, A. V. Terekhov, L. V. Bludova, Yu. A. Kolesnichenko, N. V. Shytov, D. M. Sergeyev, E. Lähderanta, and A. L. Solovjov, Low Temp. Phys. 50, 325 (2024).

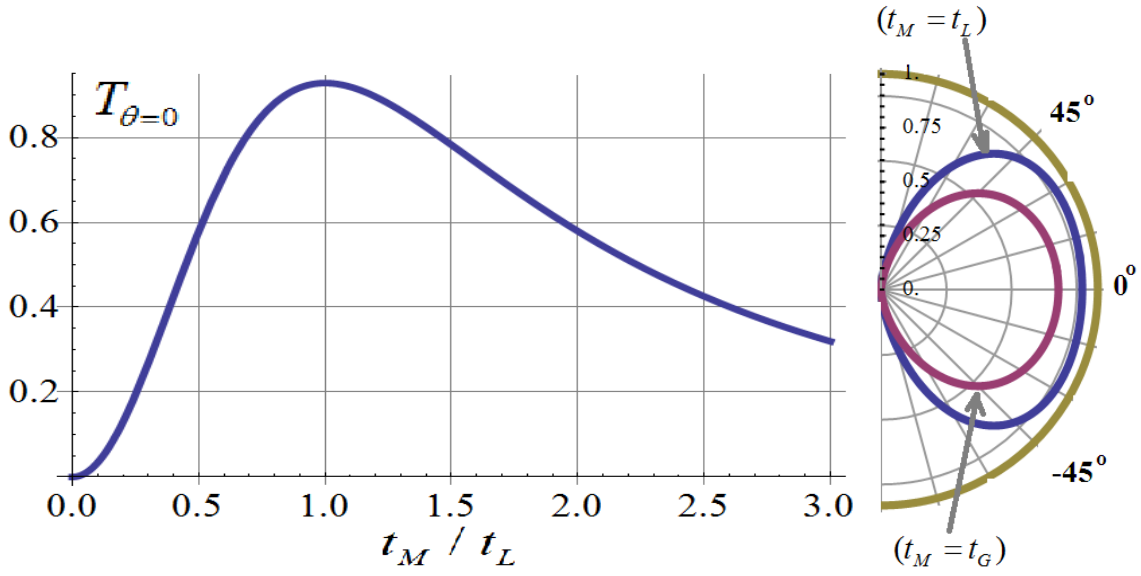
КВАНТОВІ ЛОКАЛІЗОВАНІ СТАНИ НА МЕЖІ ҐРАТКИ ЛІБА ТА ГЕКСАГОНАЛЬНОЇ ҐРАТКИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

І.В. Козлов, Ю.О. Колесніченко

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків
e-mail: kozlov@ilt.kharkov.ua

Межа розділу двох середовищ з різним топологічним порядком характеризується низкою властивостей і станів, зобов'язаних своїм існуванням саме відмінністю природи двох топологічних матеріалів, а тому стійких до зовнішніх впливів. Відомим прикладом є провідність поверхні топологічних ізоляторів. Така природна стійкість говорить про привабливість подібних інтерфейсів для сучасної електроніки, яка характеризується швидким зростанням кількості елементів на чіп, що підвищує вимоги до їх надійності.

Розглянуто таку межу між двома різними топологічними провідниками: з так званими "спін-1" ферміонами [1], та зі звичайними носіями заряду дираківського типу, які реалізовано на ґратці Ліба [2] та в графеноподібній ґратці відповідно. Обидві гратки характеризуються наявністю конуса в електронному енергетичному спектрі, але відрізняються фазою Беррі, яка дорівнює π у графені та тривіальна в гратці Ліба.



a. **b.**

Рис.1. Коефіцієнт проходження як функція інтеграла перекриття на межі t_M при нормальному падінні (a) та його кутова залежність (b).

На рис.1 показано виявлену залежність коефіцієнта проходження T величини інтеграла перекриття t_M на межі граток (a), нормованого на його значення в гексагональній гратці t_G, та його кутову залежність (b), яка показує

відсутнє “супертунелювання”: $T<1$ для всіх значень кута падіння та інтегралів перекриття. Максимальне значення $T=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$ відповідає співпадінню t_M з t_L. Тунелювання Клейна без збереження спіну не виявлено, на відміну від моделі, запропонованої в роботі [3], що можна пояснити використанням авторами континуального опису для бар’єру. Коефіцієнт проходження не чутливий до абсолютного значення хвильового вектора, але має істотну кутову залежність.

Показано, що у квантуючому магнітному полі виникають межові стани, що зв'язують властивості провідників з відсутньою та наявною фазами Беррі. Отримано аналог квазікласичного правила квантування для межових квантових станів, що має вигляд:

$$\tilde{S}_L=2\pi n-\frac{\pi}{2}+2Arg\left(\sqrt{3}\,(sin\theta+sin\tilde{S}_G)+cos\tilde{S}_G\;cos\theta+\frac{2i}{\sqrt{3}}\frac{t_Lt_G}{t_M^2}\,cos\tilde{S}_G\;cos^2\theta\right),$$

де $\tilde{S}_L=\frac{c}{eB\hbar}S_L$, $\tilde{S}_G=\frac{c}{eB\hbar}S_G$ – безрозмірні площі сегментів класичної траєкторії електрона в імпульсному просторі, що відповідає даному квантовому стану, а θ -- кут її відхилення від нормального перетину межі. У граничних випадках $S_L<<S_G$ або $S_L>>S_G$, як це помітно на рис.2, відповідні залежності починають вибудовуватися вздовж вертикальних та горизонтальних асимптот, які описуються виразами:

$$S_L=2\pi\frac{eB\hbar}{c}(\mathrm{n}+\frac{3}{4}),\quad S_G=2\pi\frac{eB\hbar}{c}(\mathrm{n}+\nu),\quad \nu\big|_{S_{p^2}^G\ll S_{p^2}^L}=\frac{3}{4},\quad \nu\big|_{S_{p^2}^G\gg S_{p^2}^L}=\frac{1}{4},$$

що пояснюється впливом фази Беррі. Збільшення сегменту траєкторії $S_G=const$ веде до додаткового зсуву фази горизонтальної асимптоти, обумовленого наявністю фази Беррі у графені, в той час як вертикальна асимптота, $S_L=const$ не відчуває зсуву, що ілюструє відсутність фази Беррі у гратці Ліба.

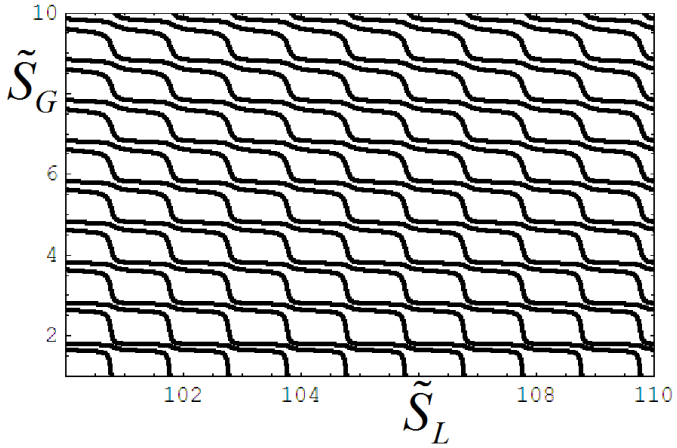


Рис.2. Площі сегментів, що відповідають межовим станам при $S_L>>S_G$.

[1] R. Mignani, E. Recami, M.Baldo, Lett. al Nuovo Cim. 11, 568 (1974).
[2] E.H. Lieb, Phys. Rev. Lett., 62, 1201 (1989).[3] Luyang Wang and Dao-Xin Yao, Phys. Rev. B 98, 161403 (2018).

TITLE GEOMETRIC DECOMPOSITION METHOD IN SOLVING EQUATIONS OF PHYSICS AND GEOMETRY EQUATIONS

R.A. Kycia

Politechniki Krakowskiej
e-mail: radoslaw.kycia@pk.edu.pl

We provide an algorithmic way of solving the Cartan structure equations, which model also all basic equations of mathematical physics. We use operator method called the geometric decomposition. It employs linear homotopy operator that defines dual cohomology to those defined by exterior derivative operator, when restricted to local star-shaped neighborhood on a manifold. The presentation will be based on the following works

[1], J. Silhan, Inverting covariant exterior derivative, arXiv: 2210.03663 [math.DG]

[2] R.A. Kycia, The Poincare lemma for codifferential, anticoexact forms, and applications to physics, Results Math. (2022)

[3] R.A. Kycia, The Poincare lemma, antiexact forms, and fermionic quantum harmonic oscillator, Results Math 75, 122 (2020)

ВПЛИВ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНОЇ ОБЛАСТІ НА СТРУКТУРУ ДИФРАКЦІЙНОГО КОНУСУ ПРУЖНОГО ПРОТОН-ПРОТОННОГО РОЗСІЯННЯ ПРИ ВИСОКИХ ЕНЕРГІЯХ

О. Лендєл

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: alexanderlengyel39@gmail.com

Диференціальний переріз пружних протон-протонних зіткнень досліджується в діапазоні від енергій адронного коллайдера ISR ($\sqrt{s}$ = 19.4 ГеВ) до енергій Великого адронного коллайдера LHC ($\sqrt{s}$ =13 ТеВ) та в широкому інтервалі переданого імпульсу, включаючи інтерференційну області 10^{-3} ГеВ^2/с < |t| < 15 ГеВ^2/с в двохкомпонентному наближенні FMO амплітуди розсіяння.

На відміну від загальноприйнятої думки 90-х років минулого сторіччя в пошуку «асимптопії» про малоймовірність будь-яких нових особливостей в адронній дифракції при високих енергіях, експерименти на LHC довели протилежне. У той же час вивчення таких фундаментальних параметрів пружного розсіяння протонів на протонах, як повний переріз $\sigma_{tot}(s)$, диференціальний переріз $\frac{d\sigma}{dt}(s,t)$, відношення реальної частини амплітуди розсіяння до її уявної частини ρ(s), нахил B(s,t) і параметр кривизни C(s,t) (для простоти кривизни) є вирішальним у створенні певної моделі сильної взаємодії. З іншого боку, нахил та кривизну, як характеристики тонкої структури дифракційного конуса адрон-адронного розсіяння, можна розглядати як індикатори переходу до «асимптопії». Одночасно було виявлено, що ефект кривизни, попри незначного вкладу в амплітуду розсіяння, призводить до значних змін у параметрі нахилу порівняно з його величиною в чисто експоненціальному наближенні, тому в підгонці диференціальних поперечних перерізів конче потрібно врахувати внесок кривизни.

Раніше кривизна протон-протонного пружного розсіяння була досліджена нами в діапазоні ГеВ-них (ISR) енергій, де було визначено, що неекспоненціальна функція лишку Померона, а також нелінійність його траєкторії суттєво диктуються експериментальними даними [1].

В унікальних експериментах з пружного pp-розсіювання при 8 і 13 ТеВ, проведених в ЦЕРН [2,3], також була виявлена така неекспоненціальна поведінку дифракційного конуса пружного *pp*-диференціального перерізу. Аналіз цих даних встановив, що диференціадьний пружний переріз фактично не спадає чисто експоненціально як exp(-b|t|) при малому значенні переданого імпульсу |t|, а скоріше демонструє ненульову величину кривизни.

У [4] нами було виявлено, що ця величина кривизни має тенденцію до зменшення та зміни знака у віддаленій області ТеВ-них енергій. У зв'язку з цим виникла ідея переглянути дані пружного *pp*-розсіювання для широкого

інтервалу енергій від енергій ISR до енергій LHC для дифракційного конуса в рамках моделі максимального Померона й Оддерона (ФМО) у широкій області переданого імпульсу [5].
На даному етапі дослідження поведінки кривизни ми використовуємо модель ФМО для двокомпонентної амплітуди розсіювання з переворотом та без перевороту спіна, додавши внесок інтерференції кулонівської і ядерної амплітуд. Це дало змогу врахувати інтерференційну областю диференціального перерізу і уточнити профіль усередненої по певному інтервалу переданого імпульсу кривизни. Отримана результуюча крива краще описує «експериментальну» кривизну у порівнянні з попередніми спрощеними наближеннями.

[1] P. Desgrolard, J. Kontros, A. I. Lengyel, E. S. Martinov, *Nuovo Cim.* 110A, 615 (1997).
[2] TOTEM Collaboration, G. Antchev et al. Nucl. Phys. B, 527, 899 (2015).
[3] G. Antchev et al. (TOTEM Collaboration), Eur. Phys. J. C, 79, 861 (2019).
[4] N. Bence, I. Szanyi, A. Lengyel, J. Phys. Studies, 26, 1101 (2022).
[5] **A**. Lengyel, T. Bence, I. Szanyi, PAST, 12,145 (2023).

НОВА КОЛЬОРОВА СТАТИСТИКА НЕАДИТИВНИХ СИСТЕМ

В.Т. Маслюк

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: volodymyr.maslyukl@gmail.com

Основи класичної статистичної фізики та термодинаміки були закладені у другій половині 19 -го століття роботами Д.К. Максвелла (1860 рік), Л. Больцмана (1871 рік) та інших. Їх відкриття стосувалося розподілу ймовірностей для систем, які можуть перебувати у різних мікроскопічних станах як функція енергії цих станів та температури системи. Іншим інструментом для характеристики таких станів, відмінним від теплових величин, є ентропія, введена Клаузіусом. Роботи такого роду були направлені на створення теоретичних основ теплових машин, робочим матеріалом яких є газові середовища, що складалися з сукупності невзаємодіючих молекул. Такі середовища є прикладами класичних адитивних систем, характеристики яких – енергія, ентропія та інші термодинамічні функції є прямо пропорційними числу їх частинок, N. У подальшому перелік адитивних систем був доповнених квантовими частинками − ферміонами та бозонами, характеристики яких також пропорційні їх численності, а особливості заповнення мікростанів враховані статистиками Фермі− Дірака та Бозе–Ейнштейна.

Починаючи з 20-го століття предметом дослідження ставали конденсовані середовища, які могли перебувати у різних фазових станах внаслідок взаємодії атомів та молекул. Така взаємодія передбачала втрату адитивності термодинамічних параметрів по числу частинок, проте основи сучасної хімічної термодинаміки виписані з використанням адитивних теоретичних моделей навіть для гетерогенних хімічних систем. І лише останнім часом предметом дослідження стають неадитивні системи, для яких термодинамічні параметри є також неадитивними величинами. Зокрема, змін зазнала концепція ентропії, різні автори запропонували узагальнення ентропії Больцмана-Гіббса [1]. Відмітною властивістю цих формул є їх неадитивність до ймовірностей факторизації, чи взагалі узагальнена форма ентропії Реньї (Rényi) [2], яка враховує різні імовірності реалізацій одного стану системи.

В доповіді розглядаються два класи неадитивних систем, внутрішня енергія яких не дорівнює сумі енергій зв’язку їх елементарних компонент, проте ентропійні члени даного стану мають як звичну логарифмічну, так і більш

ускладнену форму з суми факторіальних членів для різних кольорових наборів. Особливістю нової статистики для таких систем є можливість трактувати їх складові частини як статистично нееквівалентні, коли вони є навіть одного сорту (атоми, нуклони), але з відмінними енергіями зв'язку. Їх статистична нееквівалентність потребує введення окремих маркерів для цих частинок, наприклад, уявних кольорів. При цьому для і-го енергетичного стану системи змінюється правило встановлення його виродження w_i: урнова модель, комбінаторика не чорно-білих, а кольорових куль. Ентропійні члени, які отримуються для таких систем, мають природне пояснення скоріше не в термінах термодинамічної теорії, а в рамках їх інформаційної ємності та лабільності перетворень для досягнення рівноважного стану. Іншими словами, запропонована теорія дозволяє досліджувати упорядкування неадитивних систем, енергетичні параметри яких $\{U_i\}$ визначаються через параметри взаємодії між частинками $\{x_i\}$ та масиви кольорових наборів $\{n_{ij}\}$, які можна створити для кожного параметра з набору $\{x_i\}$. В умовах сталих температури T та тиску P рівноважний стан такої системи досягається при максимальному значенні вільної енергії Гіббса G:

$$G_i = U_i - T\,S_i + P\,V_i, \qquad (1)$$

характер зміни якої $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ визначається через вплив протилежних факторів ─ентропійного $T\Delta S$ та ентальпійного ΔH. В роботі розглянуто випадки, коли U_i має неадитивну залежність від числа частинок $U_i = U_i(\{x_i\}, \{n_{ij}\})$, $\sum_j n_{ij} = N$, а ентропійний фактор можна представити у вигляді:

$$S_i = \ln\left(\frac{N!}{\sum_j n_{ij}!}\right) \text{ для ядерних систем} \quad \textbf{(a)}$$
$$S_i = \ln\left(\sum_{\{n_{ij}\}} \frac{N!}{\sum_j n_{ij}!}\right) \text{ для полімерних систем} \quad \textbf{(b)} \qquad (2)$$

Вираз 2 **b)** має схожість до ентропії Реньї та інтерпретується в рамках інформаційної ємності, лабільності структури фізичної системи. Вирази (1) та (2) було використано для побудови нової кольорової статистики, яка дозволяє розраховувати ймовірності реалізації і-вих станів неадитивної системи при температурі T, тиску P та врахуванні кольорових наборів $\{n_{ij}\}$, формула (2).

Запропонована кольорова статистика дозволяє більш адекватно встановити особливості упорядкування уламків поділу атомних ядер [3] та

масивів метастабільних структур, які можуть утворитися при радіаційній фрагментації важливих для біоти біоорганічних молекул [4].

[1] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. Eur. Phys. J. A 40, 257 (2009). https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0
[2] T.S. Biró, A. Deppman. Entropy. Non-Additive Entropy Formulas: Motivation and Derivations. *25*(8), 1203 (2023). https://doi.org/10.3390/ e25081203
[3] V. Maslyuk, et al. Schottky-like phase transition in the fission of atomic nuclei: 235U. (2018). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevC.98.064608
[4] V. Maslyuk, A. Zavilopulo , V. Hanulych, N. Svatyuk, O. Pop, O. Simkanich. Computer 3D modeling bioorganic compounds: How the amino acids can be created? AIP Conf. Proc. 2872. 090004. (2023). https:// doi.org/10.1063/5.0163041

QUANTUM DYNAMICAL EMULATION

Gerard McCaul

Loughborough University, Loughborough, United Kingdom
e-mail: G.McCaul@lboro.ac.uk

Here I introduce a constructive method for mapping non-unitary dynamics to a weighted set of unitary operations, termed Quantum Dynamical Emulation (QDE). This construction is then used to derive a new correspondence between real and imaginary time. This enables an imaginary time evolution to be constructed from the overlaps of states evolved in opposite directions. ITQDE is then developed as a tool for estimating the ground and thermal state properties associated with a given Hamiltonian.

Additionally, a prescription for leveraging ITQDE to estimate the complete Hamiltonian spectrum (shown in Fig. 2) is outlined. This is used to develop a quantum algorithm for computing Hamiltonian spectra based on ITQDE, which is validated through numerical simulations and quantum hardware implementations.

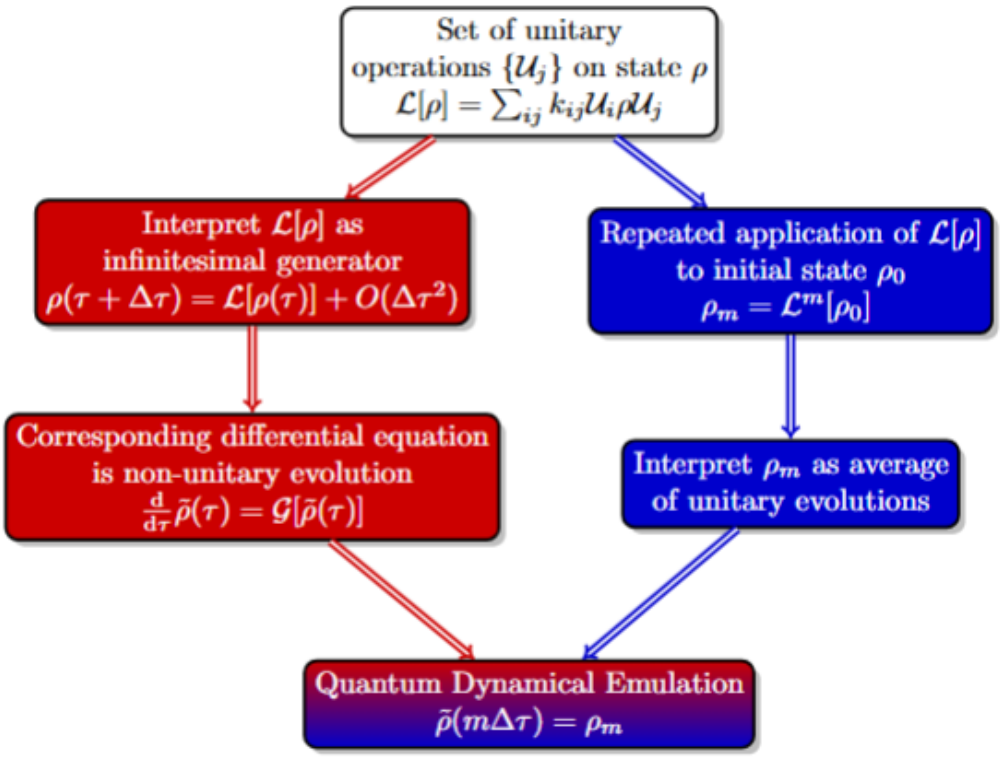


Figure 1: Schematic Representation of the QDE procedure

Finally, I will discuss how ITQDE can be utilized more broadly to derive novel thermodynamic results, including a generalisation of the Hubbard-Stratonovich transformation.

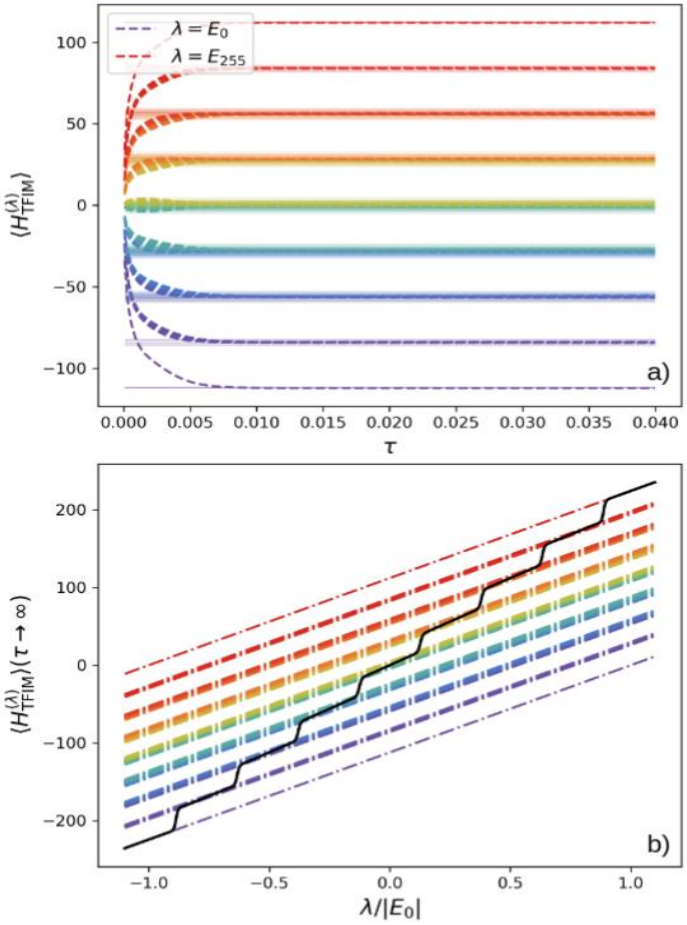


Figure 2: Spectral calculation performed using ITQDE. Dashed lines are the exact eigenenergies of the system, solid lines are the results of evolution using QDE.

A pre-print of this work can be found at: https://arxiv.org/abs/2403.03350

DFT STUDY OF HALF-METALLIC FULL-HEUSLER ALLOY N_2CaNa: STRUCTURAL, ELECTRONIC, MECHANICAL AND THERMODYNAMIC PROPERTIES

E.B. Ettah[1], M.E. Ishaje[1], Kseniia Minakova[2], Valentyna Sirenko[3], Ivan Bondar[3]

[1] University of Cross River State, Calabar, Nigeria
[2] National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine
[3] Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS, Kharkiv, Ukraine
e-mail: Kseniia.Minakova@khpi.edu.ua

This study explores the structural, electronic, mechanical, and thermodynamic properties of the full-Heusler alloy N_2CaNa, using density functional theory (DFT) to assess its potential in advanced applications like spintronics and structural engineering [1, 2]. The results indicate that N_2CaNa is structurally stable, exhibiting half-metallic behavior with significant implications for spintronics. Mechanical and thermodynamic analyses further suggest that the alloy is suitable for environments requiring durable materials with high thermal stability, paving the way for applications in technology sectors where electronic and structural reliability are essential.

Heusler alloys, intermetallic compounds with flexible electronic, magnetic, and mechanical properties, have drawn attention for their use in high-performance applications, particularly in spintronics. Full-Heusler alloys, with their characteristic formula X_2YZ, include transition metals and main-group elements and are renowned for their tunable properties. One is half-metallicity−a behavior where one spin channel is metallic, and the other is semiconducting. N_2CaNa, a lesser-known full-Heusler alloy, has been proposed for advanced applications due to its theoretical half-metallicity and thermal stability, which make it attractive for spintronic devices and materials requiring tailored thermal and mechanical resilience.

This study applies density functional theory (DFT) to comprehensively analyze N_2CaNa's properties, establishing its potential for practical applications. DFT calculations allow us to investigate the atomic structure and electronic interactions from first principles, offering accurate predictions of properties such as stability, electronic band structure, and thermodynamic behavior [3].

The primary aim of this study is to characterize N_2CaNa through DFT to assess its potential for applications in spintronics and structural engineering. Specific objectives include determining optimized structural parameters, such as lattice constants and bond lengths, to confirm stability; analyzing electronic properties, including band structure and density of states (DOS), to investigate half-metallicity and suitability for spin-

polarized conduction; evaluating mechanical properties, like elastic constants and the bulk-to-shear modulus ratio, to determine N_2CaNa's response to stress; examining thermodynamic properties to gauge the material's stability over various temperatures is crucial for high-temperature applications.

The DFT calculations were conducted using the Vienna Ab initio Simulation Package (VASP), chosen for its efficient plane-wave basis set and projector augmented wave (PAW) method. The Perdew-Burke-Ernzerhof (PBE) generalized gradient approximation (GGA) was used for the exchange-correlation function, and an energy cutoff of 500 eV ensured accurate wavefunction representation. We also used Quantum ESPRESSO for specific thermodynamic calculations. Key input parameters included:

- *Lattice Structure and K-Point Mesh:* A face-centered cubic (FCC) Bravais lattice and an 8x8x8 Monkhorst-Pack k-point grid were applied to model the crystal structure accurately.
- *Convergence Settings:* Electronic convergence was set to 10^{-6} eV with force convergence at 0.01 eV/Å for each atom.

Structural optimization was achieved through the third-order Birch-Murnaghan equation of state, optimizing lattice constants and minimizing energy. Electronic band structure and DOS were calculated to explore the alloy's electronic characteristics. Mechanical properties were derived from elastic constants, bulk modulus, and shear modulus values, while thermodynamic properties were assessed using Debye and Einstein models to predict stability across temperatures.

N_2CaNa displayed a stable structure with an equilibrium lattice constant of approximately 5.94 Å. The formation energy, calculated as 29.90 eV, confirmed its energetic favorability and crystallographic stability, both essential for applications requiring resilient materials. The electronic band structure revealed half-metallicity, with metallic behavior in the majority spin channel and a narrow bandgap (~5.08 eV) in the minority channel. This distinct feature allows N_2CaNa to conduct spin-polarized electrons, a valuable property for spintronics where data is processed via electron spin rather than charge. The DOS further corroborated this, with significant contributions from nitrogen 2p, calcium 2s, and sodium 4p orbitals near the Fermi level. Such hybridization between atomic states contributes to N_2CaNa's potential in spin-based electronic applications, enabling efficient data storage and processing. The calculated elastic constants and bulk-to-shear modulus ratio (B/G = 4.77) suggest that N_2CaNa is ductile, compliant with Born's stability criteria, and capable of withstanding stress without fracturing. The bulk modulus of approximately 60.6 GPa and Young's modulus of 35.6 GPa indicate a moderate stiffness and resistance to deformation, making N2CaNa viable for structural applications where materials must absorb mechanical energy and resist fracture. Thermodynamic stability was examined via heat

capacity and entropy calculations across temperature ranges, with results aligning with the Debye T^3 law at low temperatures and the Dulong-Petit law at high temperatures. This behavior suggests that N_2CaNa remains stable under varying thermal conditions, making it suitable for applications requiring thermal resilience, such as electronics where consistent thermal management is critical.

The DFT analysis of N_2CaNa confirms its potential as a versatile material with wide-ranging applications. Structural stability, half-metallic electronic behavior, mechanical flexibility, and thermodynamic resilience collectively position N_2CaNa as a promising candidate for spintronic, structural, and high-temperature applications. Future experimental studies are recommended to validate these theoretical findings and explore real-world feasibility. Given the alloy's unique properties, N_2CaNa could transform next-generation devices requiring high-performance materials with specialized electronic and mechanical traits.

[1] O. Appel, G. Breuer, S. Cohen, O. Beeri, T. Kyratsi, Y. Gelbstein, S. Zalkind, Materials 12, 1509 (2019).
[2] X. Zhang, J. Magn. Magn. Mater. 477, 287 (2019).
[3] E.B. Ettah, K.A. Minakova, M.E. Ishaje et al., Low Temp. Phys. 49, 1389 (2023).

САМОПОЛЯРИЗАЦІЯ ШВИДКИХ ЕЛЕКТРОНІВ У СИЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

О. Новак, М. Дяченко, Р. Холодов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми
e-mail: novak-o-p@ukr.net

Радіаційна самополяризація електронів у магнітному полі була передбачена теоретично, а пізніше підтверджена експериментально і має важливі застосування у фізиці прискорювачів [1]. Даний ефект полягає у тому, що для електронів у накопичувальному кільці поступово зростає ступінь поляризації

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-},$$

де $N_\pm$ – кількість електронів зі спіном вздовж та проти поля. Це пояснюється тим, що випромінювання фотона електроном може призвести також і до зміни напряму його спіну, причому поворот спіну проти напрямку магнітного поля є дещо більш імовірним. В результаті величина P експоненційно наближається до рівноважного значення $P\approx-0.92$.

В наведених міркуваннях істотним припущенням є сталість енергії електронів, що забезпечується роботою накопичувального кільця. У випадку високої енергії електронів стають помітними як втрата енергії електронами, так і більш складна залежність імовірності випромінювання від спіну. Крім того, сильне магнітне поле легше створити в малому об'ємі простору, тому гіпотетичний експеримент являтиме собою вільний проліт електронів через область з магнітним полем. Відмітимо роботи [2,3], де запропоновано механізм одержання сильного магнітного поля завдяки взаємодії щільного електронного пучка з мішенню, розташованою під гострим кутом. Автори дають оцінку поля 4 ГГс для енергії 10 ГеВ та щільності пучка 10^{21} см$^{-3}$, подібних до параметрів установки FACET-II [4].

В даній роботі ми розглядаємо процес самополяризації електронів з урахуванням точної спінової залежності імовірності та втрати енергії електронами. Імовірність синхротронного випромінювання можна виразити через параметр $\varepsilon=EH/(mc^2H_c)$, де E – енергія електрона, H – магнітне поле, $H_c\approx4.41\cdot10^{13}$ Гс – критичне Швінгерівське поле. При цьому час вимірюється в одиницях $t_0=(\alpha\omega_H)^{-1}$, де α – стала тонкої структури, ω_H – циклотронна частота.

Щоб одержати залежність ступеню поляризації від часу, розв'язуємо рівняння балансу відносно функцій розподілу електронів:

$$\dot{n}_\mu(t,\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \left(n_\mu(t,\varepsilon') w_{\mu\mu}(\varepsilon,\varepsilon') + n_{-\mu}(t,\varepsilon') w_{\mu,-\mu}(\varepsilon,\varepsilon') \right) d\varepsilon' - n_\mu(t,\varepsilon) W_\mu(\varepsilon)$$

де n_μ(t,ε) − густина розподілу електронів за енергіями, $w_{\mu'\mu}$(ε′,ε) − диференціальна імовірність випромінювання в одиницю часу, W_μ(ε) − повна імовірність випромінювання в одиницю часу.

На рис.1 зображено залежності ступеню поляризації P від безрозмірного часу t/t_0. Зауважимо, що в даному випадку електрони постійно втрачають енергію на випромінювання, тому не можна говорити про рівноважне значення ступеню поляризації, а лише про кінцеве значення після проходження деякої ділянки поля. Як видно з графіків, в області малих параметрів ε відбувається швидке зростання кінцевого значення поляризації при зростанні ε. Для ε>1, однак, кінцеве значення майже не змінюється і складає близько −0.8. Натомість збільшується час, необхідний для досягнення цього значення.

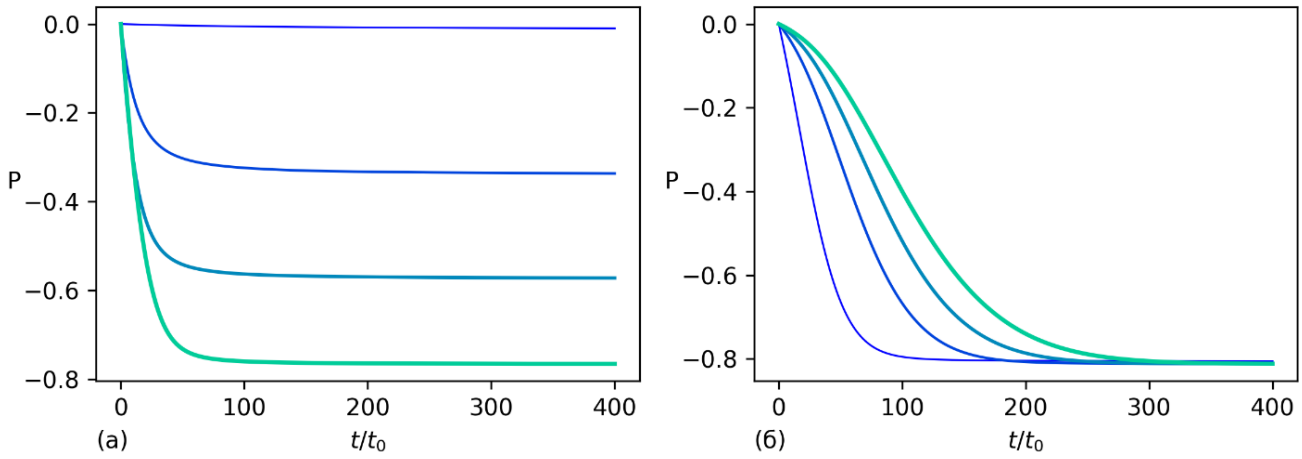


Рис. 1. Залежність ступеню поляризації від часу. Значення параметру ε, від тонких до товстих ліній: (а) 10^{-2}, 0.5, 2, 20; (б) $2\cdot10^2$, $2\cdot10^3$, $5\cdot10^3$, 10^4.

Для напруженості поля 4 ГГс та енергії 10 ГеВ [3] отримаємо оцінку $t_0\approx1.7$ фс та ε≈2. Як видно з рис.1(а), в даному випадку ступінь поляризації може досягнути значення −0.56 за час близько 170 фс, після чого ріст P значно сповільнюється. При значенні параметру $\varepsilon=10^4$ кінцева поляризація зростає до −0.8, але час поляризації збільшується майже в три рази.

[1] François Méot, Haixin Huang, Vadim Ptitsyn, Fanglei Lin. *Polarized Beam Dynamics and Instrumentation in Particle Accelerators.* USPAS Summer 2021 Spin Class Lectures. Springer, 2021.

[2] Xing-Long Zhu et al., *Efficient generation of collimated multi-GeV gamma-rays along solid surfaces.* Optica, Vol. 10, No. 1 (2023).

[3] Xing-Long Zhu et al., *Generation of relativistic polarized electron beams via collective beam-target interactions.* arXiv:2408.05768.

[4] A. Sampath et al., *Extremely Dense Gamma-Ray Pulses in Electron Beam-Multifoil Collisions.* Phys. Rev. Lett. 126, 064801 (2021).

NEW SOLUTIONS FOR KERR WITH MATTER

A.J. Nurmagambetov[1,2,3]

[1] *Akhiezer Institute for Theoretical Physics of NSC KIPT, Nat. Acad. Sci. Ukr., Kharkiv, Ukraine*
[2] *Department of Physics & Technology, Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*
[3] *Usikov Institute of Radiophysics and Electronics, Nat. Acad. Sci. Ukr., Kharkiv, Ukraine*
e-mail: ajn@kipt.kharkov.ua; a.j.nurmagambetov@gmail.com

We construct [1] solutions for the Kerr type rotating black hole with non-trivial matter in flat and (A)dS backgrounds. Symmetry arguments and singularity analysis in the proposed black hole models make it possible to fix the free parameters of the solutions; the energy conditions constraint configuration and field content of external matter. As a result, we establish a special type singularity in the north and south pole directions, generating the bipolar outflow of particles from black holes. We briefly discuss the extension of the proposed construction to the Vaidya and Kerr-Vaidya type black holes, and properties of the solutions.

The work was supported in part within the Cambridge-NRFU 2022 initiative "Individual research (developments) grants for researchers in Ukraine (supported by the University of Cambridge, UK)", project №2022.02/0052.

[1] A.J. Nurmagambetov, Studying KARMA (Kerr and Relativistic Matter Around), Preprint [arXiv:2411.07852 [hep-th]].

THEORY AND EXPERIMENT OF GRAVITON PHYSICS

T.V. Obikhod

Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, Kyiv
e-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

In the framework of physics beyond the Standard Model, an experiment is presented to search for a chiral graviton mode. These particles were found in a special type of liquid that behaves in a special way under the influence of a magnetic field. Studying the properties of graviton modes will provide an opportunity to understand quantum gravity.

To study gravitational modes, inelastic scattering of photons is considered, modeled using microscopic theory with Hamiltonians at different filling factors [1]. A common feature of fractional quantum Hall (FQH) fluids is multiple graviton modes (GMs) in different subspaces in one Landau level (LL). The number of observed GMs is dynamical and meaningful for specific interaction Hamiltonians. Each GM can be interpreted as the null spaces of model Hamiltonians within one LL.

Our goal is to present the geometric origin of GM and the hierarchical structure of conformal Hilbert spaces as null spaces of model Hamiltonians. We then introduce K-group theory to identify each set of GM excitations, which leads to a topological explanation of the emergence of multiple GM.

We'll use the following Hamiltonian

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \underline{g}^{ab} \hat{\pi}_{ia} \hat{\pi}_{ib} + \hat{V}_{int}$$

where $\hat{\pi}_{ia} = \hat{p}_{ia} + e\hat{A}_{ia}$ – the dynamical momentum operator of the i-th electron, A_i is the external vector potential, connected with magnetic field by formula $B = \epsilon^{ab}\partial_a A_{ib}$. $\hat{V}_{int}$ describes the dynamics only within a single LL, the magnetic length is $l_B = \sqrt{1/eB}$. The Hilbert space of a single LL, referred to as the lowest LL (LLL), is parametrized by the metric $\underline{g}^{ab}$, which leads to density modes in higher LLs, known as "cyclotron gravitons". The Hilbert spaces like LLL are called conformal Hilbert spaces (CHSs) as they are generated by the conformal operators like the Virasoro algebra, known as the Virasoro constraint in string theory, applied only on the physical states. Such CHSs are built up with quasiparticles. Fig. 1 illustrates a hierarchical structure of CHS in the LLL.

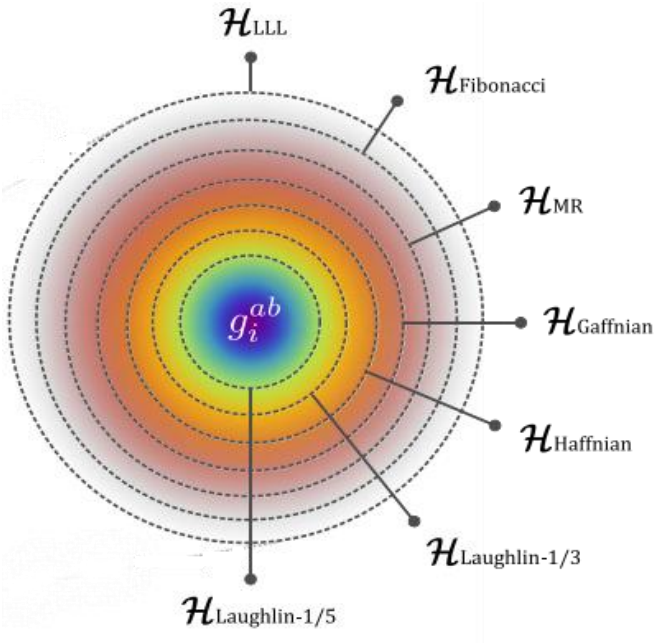


Figure 1. The hierarchical structure of the CHSs in the LLL.

We can use the apparatus of the K-group for calculation of Hilbert space states of charged particles for explanation of the FQHE, which are topological phases of LLLs. Since we are dealing with four types of interaction, it is appropriate to use the apparatus of vector bundles to describe a complex formation of D-brane type. B-field interacting with D-branes can be taken into account through the Dixmier-Douady invariant, which characterizes the bundles and describes the strength of the Neveu-Schwarz B-field interacting with D-branes. D-branes are topological solitons whose charges are described by Grothendieck K-groups. Reduction of twisted K-groups to an exact sequence of the form

$$0 \to Z \to Z \to Z_n \to 0$$

leads to the result

$$K_0(S^3, n[H]) = Z_n \ .$$

This group value determines the topological charges of the D6-brane in the presence of the Neveu-Schwarz -field [2].

[1] Wang, Y., Yang, B., Phys. Rev. B 105, 035144 (2022).
[2] Yu. Malyuta, T. Obikhod, Reports of the NAS № 6, 84 (2001).

IS THE REALIZATION OF COSMOLOGICAL ENERGIES AND PROCESSES POSSIBLE IN LOCAL ASTROPHYSICAL EVENTS?

Oleksandr Bukalov

Center for Physical and Space Research of the International Institute of Socionics,
Yu. Illenka str., 12, Kiev-050, 04050, Ukraine
e-mail: boukalov@gmail.com

If the baryogenesis process occurred at energies below 1012GeV, it should also occur in modern high-energy astrophysical processes, the indicators of which are ultra-high-energy cosmic rays. But this would lead to a regular and significant violation of the law of conservation of baryon number in the form of the effect of proton decay. However, experimental data impose significant restrictions on this process. Therefore, we propose the principle of energy prohibition, according to which it is impossible to achieve energies at which baryon number violation can occur in astrophysical and experimental local processes in a cosmologically stable vacuum. This conclusion supports the baryogenesis models realized in the era of Grand Unification or during inflaton decay, i.e. at energies of $10^{13} \div 2 \cdot 10^{16}$GeV. Therefore, baryogenesis models considering energies below 10^{12}GeV need to be revised.

SQUEEZING AND AMPLIFICATION IN OPEN QUANTUM SYSTEMS WITH COLOR CENTERS IN THE LIMIT OF A LARGE NUMBER OF LEVELS IN THE JAYNES-CUMMINGS MODEL

R.T. Ovsiannikov[1], D. Bondar[2], A.G. Sotnikov[1]
[1] NSC «Kharkiv Institute of Physics and Technology», Kharkiv Ukraine
[2]Tulane University, New Orleans, Louisiana, United States

Coupling microwave modes confined in a cavity with diamond slabs or films enriched with numerous color centers could pave the way for novel approaches to reducing noise. It also opens possibilities for advanced methods of signal processing and the generation of quantum microwave states. One of the key advantages of diamond color centers is their unique ability to reach their ground state when illuminated with optical light. This preparation technique transforms the color centers into an ultra-low-noise system. Effectively, this means they become an extremely low-temperature medium, making them ideal for processing and controlling microwave signals.

Ensembles of few-level emitters have the ability to create nonlinear interactions for electromagnetic fields. To achieve this, the energy level structure is often engineered, and external driving fields are applied to induce effects like electromagnetically induced transparency. This phenomenon is crucial because it minimizes unwanted absorption, which typically arises when nonlinearities are accompanied by the decay of energy levels in the emitters. The absorption issue is usually a major concern, but it becomes less problematic when dealing with color centers.

For example, in nitrogen-vacancy centers, the spin levels with the lowest energy, such as a three-level configuration, have exceptionally long lifetimes. As a result, energy loss due to decay is significantly reduced, making these systems more efficient. Beyond that, ensembles of emitters can also create nonlinear effects for single electromagnetic modes. However, the magnitude of these effects is limited to the strongest nonlinearities that could be produced by a single emitter.

The advantage of using an ensemble lies in its ability to increase the effective coupling strength. In simpler terms, when multiple emitters work together, they enhance the interaction rate. If an individual emitter has a coupling rate of g_0, an ensemble with N emitters functions as if it were a single emitter with a much higher coupling rate proportional to the square root of N, $g=N^{1/2}g_0$. This increase in coupling strength is particularly useful for generating nonlinearities off-resonance, making ensembles a powerful tool for amplifying interactions.

At this research stage, we replace the ensemble of N two-level emitters by a single N-level emitter and describe it in the framework of the Jaynes-Cummings model. We consider the interaction of this N-level emitter with the cavity mode in the limit of large N and employ the Holstein-Primakoff transformation for this purpose. To determine the parameters at which the highest amplification and the lowest squeezing are achieved, we construct and solve the equations of motion for the system under study in the framework of the perturbation theory. As a result, we obtain the conditions for parametric resonance in the system, accounting also for the impact of the damping processes.

R.O. and A.S. acknowledge support by the National Research Foundation of Ukraine under the call "Excellent Science in Ukraine", project No. 235/0073.

QUANTUM OPEN SYSTEM IDENTIFICATION FROM TIME-SERIES DATA VIA GLOBAL OPTIMIZATION: OPTIMALLY ACCURATE MARKOVIAN MODELS WITH GENERAL MASTER EQUATION IN KOSSAKOWSKI FORM

Denys I. Bondar,[1,*] Zakhar Popovych,[1,†] Kurt Jacobs,[2, 3, ‡] Georgios Korpas,[4,5,§] and Jakub Marecek[5 ¶]

[1]Department of Physics, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA
[2]DEVCOM Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland 20783, USA
[3]Department of Physics, University of Massachusetts at Boston, Boston, Massachusetts 02125, USA
[4]HSBC Lab, Innovation & Ventures, 8 Canada Square, London E14 5HQ, U.K.
[5]Department of Computer Science, Czech Technical University in Prague, Karlovo nam. 13, Prague 2, Czech Republic

emails: [*]dbondar@tulane.edu, [†]zpopovych@tulane.edu, [‡]dr.kurt.jacobs@gmail.com, [§]georgios.korpas@hsbc.com, [¶]jakub.marecek@fel.cvut.cz

Accurate models of the dynamics of quantum circuits are essential for optimizing and advancing quantum devices. Since first-principles models of environmental noise and dissipation in real quantum systems are often unavailable, deriving accurate models from measured time-series data is critical. However, identifying open quantum systems poses significant challenges: powerful methods from systems engineering perform poorly beyond weak damping because they fail to incorporate essential constraints required for quantum evolution (e.g. positivity). Traditional methods that can include these constraints are typically multi-step, fitting linear models to physically grounded master equations, often resulting in non-convex functions in which optimizers get stuck in local extrema. In this work, we solve these problems by formulating quantum system identification directly from data as a polynomial optimization problem, enabling the use of recently developed global optimization methods. These methods are essentially guaranteed to reach global optima, allowing us to efficiently obtain the most accurate Markovian model for a given system. This allows us, for example, to take the error of these Markovian models as an operational measure of the non-Markovianity of the system. We test our method with the spin-boson model — a two-level system coupled to a bath of harmonic oscillators — for which we obtain the exact evolution using matrix-product-state techniques. We show that polynomial optimization significantly outperforms traditional state-of-the-art optimizers, and we show that even for strong damping Kossakowski-form master equations can provide accurate models of the spin-boson system (fractional errors at the level of 10^{-3}). Using Breuer's measure of non-Markovianity as an example we show that there can be large differences between such measures and the accuracy of the best

Markovian models, and both measures are highly non-monotonic with the damping rate. We expect that our method can be extended to non-Markovian models, and has the potential to significantly improve quantum system identification and control, with applications ranging from quantum gate design to error correction.

This research aims to formulate quantum system identification as a polynomial optimization problem (POP) to recover physically well-grounded master equations directly from experimental data, benefiting from the existence of global optimization techniques tailored for such problems.

In our study, polynomial system identification was used to identify the parameters of the GKSL master equation in form [1]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\,[H,\rho] + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n^2-1} C_{kl}\left(\left[f_k,\rho f_l^{\dagger}\right] + \left[f_k\rho, f_l^{\dagger}\right]\right) = \mathrm{K}_{H,C}(\rho)$$

where ρ is the density matrix, H - Hamiltonian, and C_{kl} – Kossakowski matrix responsible for the dissipation in the system, f_k – basis operators. The uniform discretization of the integration domain $[0,t]$, by sampling the process N times, yields the formulation for the identification of the parameters of Kossakowski super-operator $\mathrm{K}_{H,C}(\rho)$ as the following unconstrained polynomial optimization problem and the associated unconstrained POP:

$$\min_{H,C} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left\| \rho_{j+1} - e^{-\mathrm{K}_{H,C}t}\,\rho_j \right\|$$

Our research validates this approach through a case study on the spin-boson system, indicating high fidelity between exact trajectories and model outputs, alongside the models' correlation with non-Markovian behaviors [2].

This novel method simplifies the identification process, reduces computational demands, and minimizes numerical errors. Our findings highlight the effectiveness of polynomial optimization in managing both Markovian and complex non-Markovian open quantum systems, promising advancements in quantum system control [3, 4, 6].

Keywords: Open quantum systems, system identification, polynomial optimization, Lindbladian master equations, Kossakowski matrix, Markovianity, spin-boson system.

References

[1] Gorini, Vittorio, Andrzej Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. 1976. "Completely Positive Dynamical Semigroups of *N* -Level Systems." *Journal of Mathematical Physics* 17(5):821–25. doi: 10.1063/1.522979.

[2] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, and Jyrki Piilo. "Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems". en. In: Physical Review Letters 103.21 (Nov. 2009), p. 210401. issn: 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.103.210401.

[3] Jie Wang, Victor Magron, and Jean-Bernard Lasserre. TSSOS: A Moment-SOS hierarchy that exploits term sparsity. arXiv:1912.08899 [math]. May 2020. url: http://arxiv.org/abs/1912.08899 (visited on 10/24/2022).
[4] D. Henrion, Milan Korda, and Jean-Bernard Lasserre. The moment-SOS hierarchy: lectures in probability, statistics, computational geometry, control and nonlinear PDEs. Series on optimization and its applications vol. 4. New Jersey: World Scientific, 2021. isbn: 978-1-78634-853-1.
[5] Denys I. Bondar et al. “Recovering models of open quantum systems from data via polynomial optimization: Towards globally convergent quantum system identification”. In: (2022). Publisher: arXiv Version Number: 1. doi: 10.48550/ARXIV.2203.17164. url: https://arxiv.org/abs/2203.17164 (visited on 01/18/2024).
[6] Jiawang Nie. Moment and polynomial optimization. MOS-SIAM series on optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2023. isbn: 978-1-61197-760-8

ЕЛЕКТРОННЕ ЗБУДЖЕННЯ ТА ІОНІЗАЦІЯ АТОМІВ ВАЖКИХ МЕТАЛІВ

В.І. Роман, Л.О. Бандурина, Г.М. Гомонай

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: viktoriyaroman11@gmail.com

На сьогодні для більшості важких атомів та іонів теоретичні розрахунки перерізів іонізації та збудження є дуже ненадійними, що є наслідком складної будови їх електронних оболонок. Із збільшенням числа електронів змінюється характер зв'язку між їх моментами, виникає змішування конфігурацій, що робить неможливою класифікацію в термінах чистих станів. Ця робота присвячена розрахункам перерізів іонізації електронним ударом важких багатоелектронних атомів свинцю (Pb) та бісмуту (Bi). Точні дані про перерізи іонізації при зіткненнях повільних електронів з атомами Pb та Bi мають як фундаментальний інтерес, так і важливе прикладне застосування, зокрема, в астрофізичних дослідженнях. Широку розповсюдженість свинцю було виявлено у віддалених зірках нашої галактики [1] й астрономічні спостереження показують, що такі зірки збагачені свинцем більше, ніж будь-яким іншим хімічним елементом, який є важчим за залізо. Також випромінювання спектральних ліній бісмуту виявлено у хімічно пекулярних зірках HgMn χ Лупі та HR 7775 [2].

Розрахунки проведені за допомогою програмного пакета Flexible Atomic Codes [3] шляхом розв'язку рівняння Дірака-Фока-Слетера в релятивістських наближеннях Кулон-Борна (CB), спотворених хвиль (DW) та бінарних зіткнень (BED). Ефекти вищих порядків були враховані шляхом включення Брейтівської взаємодії. Більш детально див. в [4-5].

Для того, щоб оцінити можливості використаних методик у наших теоретичних розрахунках, ми порівняли отримані повні перерізи прямої іонізації атома Pb електронним ударом із наявними у літературі експериментальними та теоретичними даними [6-8]. На рис. 1 наведено порівняння повних перерізів прямої іонізації $\Sigma\sigma_{ion}=\sigma_{ion}(6p^2)+\sigma_{ion}(6s^2)+\sigma_{ion}(5d^{10})$, отриманих нами з використанням трьох наближень з розрахунками повного перерізу прямої іонізації 6p та 6s оболонок атома Pb електронним ударом $\Sigma\sigma_{ion}=\sigma_{ion}(6p^2)+\sigma_{ion}(6s^2)$ [8], виконаними у наближенні залежного від часу сильного зв'язку каналів (TDCC - time-dependent close-coupling method). Дані наших теоретичних розрахунків порівнюються також з експериментальними даними перерізів іонізації атома Pb

електронним ударом [6] та [7], для яких невизначеність експериментальних результатів становила 10% та 7%, відповідно.

Як бачимо, у біляпороговій області енергій до 10 еВ найкраще співпадіння з експериментом дає наближення BED. При більш високих енергіях всі теоретичні дані дають занижені результати. Це пов'язано з тим, що наші дані на рисунку не включають внесок основного непрямого процесу – збудження-автоіонізації, а такий внесок за нашими розрахунками та оцінками [9] може досягати 45% в області енергій зіткнень 35-40 еВ. У цій області енергій електронів результати теоретичних розрахунків [8] майже співпадають з експериментом, навіть без врахування перерізу прямої іонізації та збудження-автоіонізації $5d^{10}$ оболонки. Тому ми вважаємо, що розрахунки [8] є явно завищеними і переоцінюють внесок іонізації $6p^2$ та $6s^2$ оболонок у повний переріз іонізації.

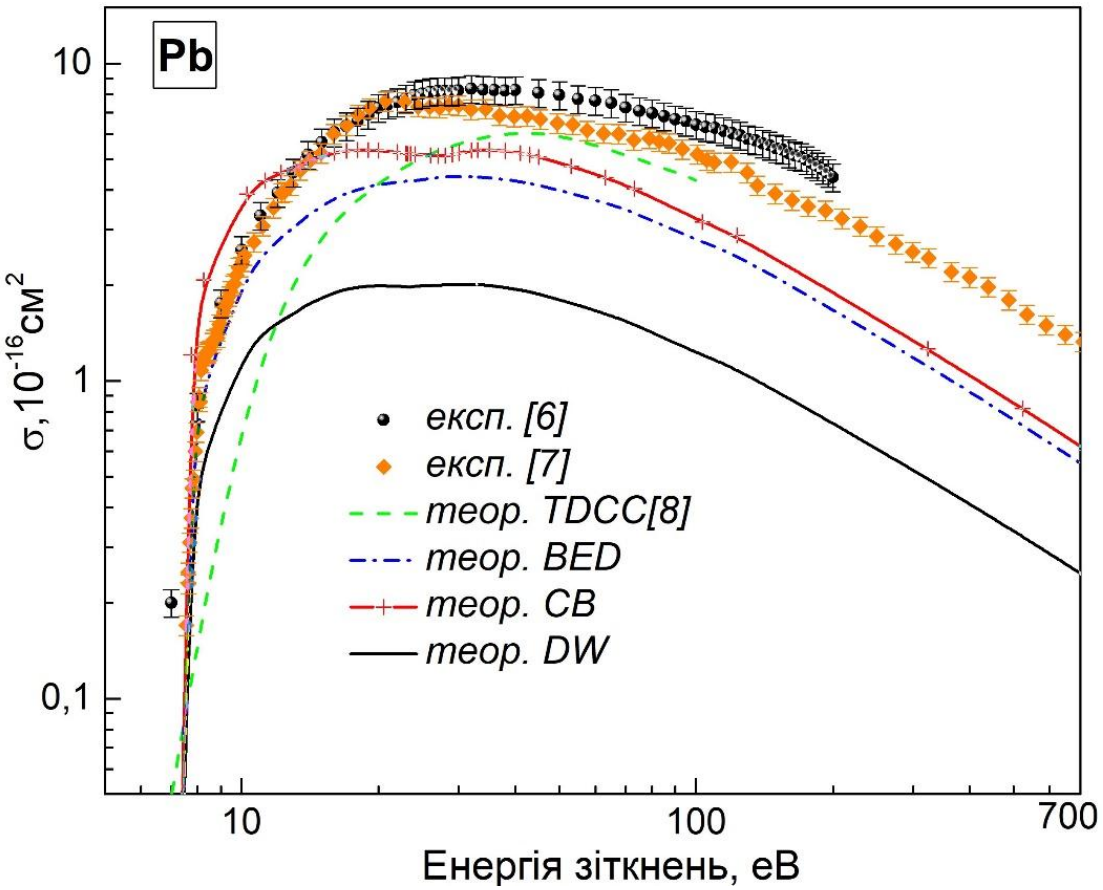


Рис.1 Перерізи повної однократної іонізації σ атома Pb: експериментальні дані [6, 7]; теоретичні розрахунки перерізів прямої іонізації в наближеннях: DW – спотворених хвиль, CB - Кулон - Борна, BED – дипольних бінарних зіткнень, TDCC - залежного від часу методу сильного зв'язку [8]

Аналогічна ситуація з результатами величин перерізів спостерігається і для атома Bi.

Проведені розрахунки перерізів іонізації є джерелом інформації про структуру атомів Pb і Bi та, окрім фундаментального значення, будуть використані для планування експериментів у відділі електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України.

[1] S. Van Eck, *et al.*, Nature **412**, 793 (2001).
[2] G. M. Wahlgren, *et al.*, The Astrophysical Journal **551**, 520 (2001).
[3] F.M. Gu, Can.J.Phys. **86**, 675 (2008).
[4] В.І. Роман, Л.О. Бандурина, Наук.вісник УжНУ, сер. Фіз. 43, 74 (2018).
[5] V. Roman, L. Bandurina, A. Gomonai, J. of Phys. Studies **28(3)**, 3603 (2024).
[6] R. S. Freund, *et al.*, Physical Review A. **41**, 3575 (1990).
[7] P. C. E. McCartney, *et al.*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **31**, 4821 (1998).
[8] M.S. Pindzola, S.D. Loch, J.P. Colgan, Eur. Phys. J. D. **75**, 45 (2021).
[9] M. Eck, D. Fursa, I. Bray, O. Zatsarinny, K. Bartschat, J. Phys. B. **53**, 015204 (2020).

ANALYSIS OF EXPERIMENTAL TEMPERATURE DEPENDENCES OF THERMAL CONDUCTIVITY OF POLYMERS AND POLYMER COMPOSITES

V.V. Sagan, A.I. Krivchikov, V.A. Konstantinov

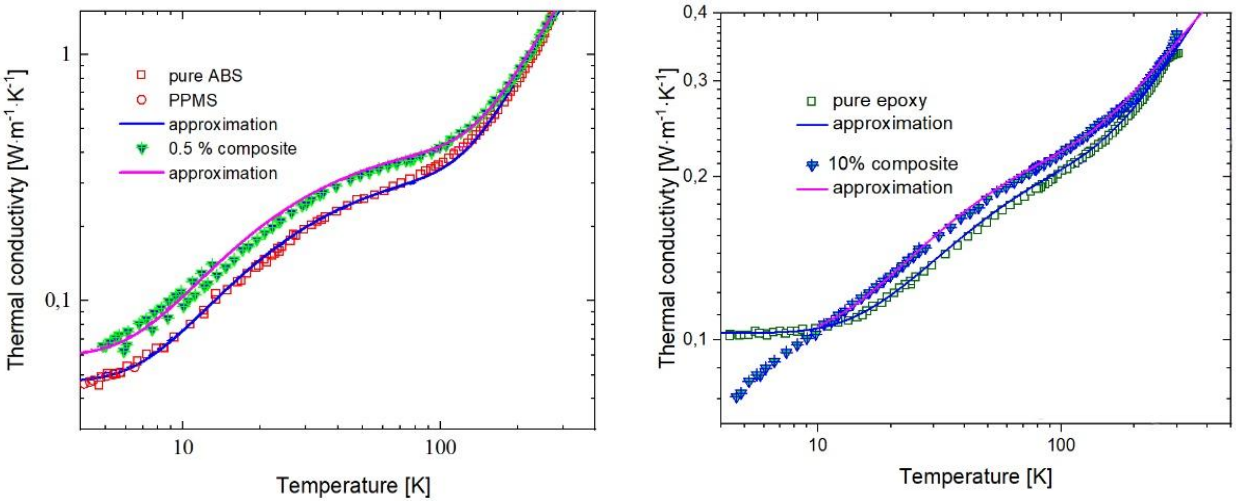
B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine
47 Nauky Ave., Kharkiv 61103, Ukraine
e-mail: sagan@ilt.kharkov.ua

In the broad field of nanotechnology, polymer matrix-based nanocomposites have become a relevant area of modern development and research. This is due to their wide application in biomedicine, electrical/electronic/optoelectronic applications, and interest in fuel cells. The field of nanotechnology is one of the most popular areas of current research and development in nearly all technical fields. In our work, we focused on trends in improving the properties of these composites, particularly concerning heat transfer.

Given the widespread use of graphene oxide (GO) for obtaining graphene-based materials for composites and other applications, we focused on polymer nanocomposites that use thermally reduced GO as a filler. Specifically, thermally reduced graphene oxide (trGO), obtained from GSM-2 graphite powder with an average particle size of approximately 10 μm, was used to create the composite [1].

In this work, a study was conducted on the change in the temperature dependence of the thermal conductivity of polymer composites based on ABS (Acrylonitrile Butadiene Styrene) and epoxy resin. The thermal conductivity of the compounds was measured over a wide temperature range, specifically using the PPMS system in the temperature range from 2 to 5 K, and above 5 K using an experimental setup [2].

To describe the obtained experimental results, a universal approximation of the temperature dependence for amorphous polymers was applied, covering a wide temperature range—from the lowest to high values, including the plateau, inflection point, growth, and saturation of thermal conductivity with increasing temperature. It was found that this temperature dependence can be described by an Arrhenius-type approximation expression: $\kappa(T) = \kappa_{pl} + \kappa_0 \cdot exp(-E/T)$, where κ_0 is the value of the high-temperature limit of thermal conductivity, representing the maximum value of the diffuson contribution by the excitation system referred to as diffusons, and E denotes the characteristic energy associated with the dominant diffusons, expressed in K.



Figures 1 and 2 show that this approach to analyzing the experimental temperature dependencies of the thermal conductivity of polymers and polymer composites is effective and can be applied to various polymer materials with glass-like behavior over a wide temperature range, including both pure amorphous polymers and those containing fillers with different concentrations.

This work was supported by the National Research Foundation of Ukraine (project № 2023.03/0012).

[1] A.I. Krivchikov, A. Jeżowski, V.A. Konstantinov, V.V. Sagan, O.A. Korolyuk, and D. Szewczyk, Thermochimica Acta 733, 179696 (2024). https://doi.org/10.1016/j.tca.2024.179696
[2] A. Jeżowski, B.A. Danilchenko, M. Boćkowski, I. Grzegory, S. Krukowski, T. Suski, and T. Paszkiewicz, Solid State Communication 128(2-3), 69-73 (2003). http://dx.doi.org/10.1016/S0038-1098(03)00629-X

DARWIN'S DREAM: PHOTONS AS PARTICLES ON PAR WITH ELECTRONS

M. K.-H. Kiessling, A. Shadi Tahvildar-Zadeh

Rutgers University (New Brunswick)
e-mail: shadit@math.rutgers.edu

In 1932 the physicist C. G. Darwin wrote: *"The Compton effect, at its discovery, was regarded as a simple collision of two bodies, and yet the detailed discussion at the present time involves the idea of the annihilation of one photon and the simultaneous creation of one among an infinity of other possible ones. We would like to be able to treat the effect as a two-body problem, with the scattered photon regarded as the same individual as the incident, in just the way we treat the collisions of electrons."* Notes on the theory of radiation. *Proc. Roy. Soc. London*. A 136, 36-52.

In this talk I will report on the extent to which we have been able to realize Darwin's dream: In one space dimension we have provided a quantum-mechanical treatment of Compton scattering in which photons are treated as particles on equal footing with electrons [1]. This is achieved through a certain relativistic extension of the framework proposed in 1927 by de Broglie and 25 years later again by Bohm [2], and relies on our ability to describe (in any number of space dimensions) not just the electron, but also the photon, as a point particle whose motion is guided by a relativistic quantum mechanical wave function, one that possesses a conserved time-like future-directed probability current [3].

In our model the interaction between the two particles is implemented via a Lorentz-invariant no-crossing-of-paths boundary condition for the multi-body, multi-time wave function of the system (first proposed by Dirac [4]) defined on the two-particle configuration space. Boundary conditions are imposed on the submanifold of coincident events in this configuration space and are shown to be compatible with particle current conservation. The corresponding initial-boundary-value problem is proved to be well-posed, and particle trajectories are shown to exist globally in a Hypersurface Bohm-Dirac setting [5], for *typical* initial configurations.

We have recently extended this work to a quantum-mechanical three-body system [6], still in one space dimension, comprised of one photon and two electrons. Once again, manifest covariance is achieved using Dirac's formalism of multi-time

wave functions, and the interaction between the photon and each electron is implemented through the same type of boundary condition as in the above. The electrons do not interact directly, but only via the photon bouncing between them. The corresponding initial-boundary value problem is shown to be well-posed, and it is shown that the unique solution can be represented by a convergent infinite sum of Feynman-like diagrams, each one corresponding to the photon bouncing between the two electrons a fixed number of times.

We are currently working on extending the above results to three space dimensions. The main challenge in doing so is that in more than one space dimension, the coincidence manifolds have higher co-dimension inside the configuration space, and thus putting boundary conditions on them may have no effect on the evolution of the multi-body wave function. We are optimistic that a differential-geometric approach to the problem would provide a way out of this dilemma.

In another direction, we are now able to extend our work on the single photon equation in three space dimensions to the case where the background spacetime is not just the flat Minkowski space, but any asymptotically flat, globally hyperbolic Lorentzian manifold, including those with no symmetries [7]. Our previous construction of the photon probability current relied on the domain of the wave function being the Minkowski space, and the conserved quantities associated to its symmetries via Noether's Theorem, to construct a constant time-like vectorfield ---and thus a foliation by spacelike hyperplanes--- that was entirely determined by the initial wave function. In the curved spacetime setting we are able to replace these with conserved quantities that arise from the symmetries of the *target space*, which is the Clifford algebra ***Cl(1,3)***. (The existence of such additional conservation laws was already foreshadowed in the work of Simulik [8].) The resulting Noetherian conserved currents are then adjusted to become *boundary currents* [9], i.e. surface densities that can be integrated on the sphere at spatial infinity of an asymptotically flat manifold to yield global ADM-like conserved quantities. In this way we construct a constant rank-two spinor "at infinity," on which we can evaluate the Riesz tensor [10] associated with our photon wave equation, to yield a constant time-like vectorfield that is once again determined solely by the initial photon wave function. We can then use this vectorfield to construct an "observer-independent" quantum probability current for the photon in the same manner that was done in [3].

[1] M.K.-H. Kiessling, M. Lienert, and A.S. Tahvildar-Zadeh. A Lorentz-covariant interacting electron–photon system in one space dimension. *Lett. Math. Phys*. 110:3153–3195, (2020).
[2] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"

variables. Part I, *Phys. Rev.* 85:166–179 (1952); Part II, *ibid.*, 180–193 (1952).
[3] M. K.-H. Kiessling and A. S. Tahvildar-Zadeh. On the quantum mechanics of a single photon, *J. Math. Phys*., 59:112302 (2018).
[4] P. A. M. Dirac. Relativistic quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. London*. A 136 (829):453–464, (1932).
[5] D. Dürr, S. Goldstein, K. Münch-Berndl, and N. Zanghì, Hypersurface Bohm–Dirac models. *Phys. Rev.* A 60: 2729–2736 (1999).
[6] L. Frolov, S. E. Leigh, and A. S. Tahvildar-Zadeh. On the relativistic quantum mechanics of a photon between two electrons in 1+1 dimensions, [arXiv:2312.06019]
[7] M. K.-H. Kiessling and A. S. Tahvildar-Zadeh. Photons in curved spacetime. *in preparation.* (2024)
[8] V. M. Simulik, Connection between the symmetry properties of the Dirac and Maxwell equations. Conservation laws, *Teoret. Mat. Fiz*. 87, 76–85 (1991). 22
[9] D. Christodoulou. *Mathematical Problems of General Relativity I*. Vol. 1. European Mathematical Society, (2008).
[10] M. Riesz, *Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste*, In *Dixieme Congres Math. des Pays Scandinaves*, 123–148, Copenhagen (1946).

SPECTRAL GAPS OF 2D AND 3D QUANTUM MANY-BODY SYSTEMS IN THERMODYNAMIC LIMIT

I.V. Lukin[1], A.G. Sotnikov[1,2], D.I. Bondar[3]

[1]Akhiezer Institute for Theoretical Physics, NSC KIPT, Kharkiv, 61108, Ukraine
[2]Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Square, Kharkiv, 61000, Ukraine
[3]Department of Physics and Engineering Physics, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA
e-mail: a_sotnikov@kipt.kharkov.ua

We present an expression for the energy gap between the ground and the first exited state of quantum many-body systems, opening up new prospects for performing and accelerating spectral calculations. We develop and demonstrate one such possibility in the context of tensor network simulations. Our approach requires only minor modifications of the widely used Simple Update method [1,2] and is computationally lightweight relative to other approaches.

Our algorithm for calculating the spectral gap runs as follows: We employ the infinite projected entangled pair states of the bond dimension D and optimize the randomly initialized infinite projected entangled pair state (iPEPS) wave function (within a predefined periodic unit cell) with the imaginary time evolution. We discretize the imaginary time propagation and apply either the Trotterized gates representing the time-stepper evolution operator or a projected entangled pair operator (PEPO) type approximation of this operator constructed via the W^{II} method [3], to the iPEPS. Following the application of these gates/PEPO, the bond dimension D of the iPEPS wave function typically increases and must be truncated back to its original value. This truncation is performed using the simple update method, a cost-effective and widely used approach in iPEPS optimization, especially for gapped nontopological systems

We validate it by computing spectral gaps of the 2D and 3D transverse-field Ising models and find strong agreement with previously reported perturbation theory results [4]. The runtime of our method scales as $O(D^{z+1})$, where z is the lattice connectivity (i.e., z=4,6 for square and cubic lattice geometries, respectively). Concretely, it takes about 10 min on a typical desktop computer to estimate one particular value of the spectral gap in 3D for the given parameters of the transverse field. Our method is complementary to the more powerful but computationally very demanding variational iPEPS approach [5], which scales as $O(D^{10})$-$O(D^{12})$; moreover, the latter method is only applicable to infinite regular 2D lattices and, unlike our approach, cannot be currently extended to 3D.

To verify the applicability of our proposed method to different types of systems, particularly those with symmetry-protected topological order, we also extend our analysis to calculate the gap for the 1D Haldane model. Our estimated numerical value of the gap is in close agreement with previously published numerical results.

We further discuss an extension of the proposed methodology to analyze the dispersive relation E(k) in the transverse-field Ising models. In terms of special operators creating excitations in the corresponding k-sectors, we show that for the analysis of the energy spectrum one requires only additional data processing with no need for any advanced computational schemes. For finite-size systems, we compare our results from the imaginary-time evolution to those from the exact diagonalization and observe a good quantitative agreement.

[1] H. C. Jiang, Z. Y. Weng, and T. Xiang, Accurate determination of tensor network state of quantum lattice models in two dimensions, Phys. Rev. Lett. 101, 090603 (2008), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.090603.
[2] B. Bruognolo, J.-W. Li, J. von Delft, and A. Weichselbaum, A beginner's guide to non-abelian iPEPS for correlated fermions, SciPost Phys. Lect. Notes 25 (2021), https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.25.
[3] M. P. Zaletel, R. S. K. Mong, C. Karrasch, J. E. Moore, and F. Pollmann, Time-evolving a matrix product state with long-ranged interactions, Phys. Rev. B 91, 165112 (2015), https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.165112.
[4] I. V. Lukin, A. G. Sotnikov, J. M. Leamer, A. B. Magann, D. I. Bondar, Spectral Gaps of 2D and 3D Many-body Quantum Systems in the Thermodynamic Limit, Phys. Rev. Research 6, 023128 (2024), https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.023128
[5] B. Ponsioen and P. Corboz, Excitations with projected entangled pair states using the corner transfer matrix method, Phys. Rev. B 101, 195109 (2020), https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.195109.

I.V.L. and A.G.S. acknowledge support by the National Research Foundation of Ukraine under the call "Excellent science in Ukraine" (2024-2026).

MATRIX MODELS AS A BASIS FOR QUANTUM SPACE-TIME AND GRAVITY

Harold Steinacker

Department of Physics, University of Vienna
e-mail: harold.steinacker@univie.ac.at

The IKKT matrix model was introduced as a constructive definition of (some corner of) IIB string theory. We show that it naturally leads to quantum space-time solutions, whose geometry is governed by an emergent 3+1 dimensional gravity. The Einstein-Hilbert action is obtained as a quantum effect. At cosmic scales, significant deviations from general relativity are expected. Some aspects of this emergent gravity theory and the underlying framework are discussed, including the appearance of higher-spin fields.

UNUSUAL SUPERCONDUCTIVITY IN RARE EARTH BORIDES $Dy_{1-x}Y_x(Rh, Ru)_4B_4$

A.V. Terekhov, V.M. Yarovyi, I.V. Zolochevskii, L.O. Ishchenko, and E.V. Khrystenko

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv
e-mail: terekhov@ilt.kharkiv.ua

One of the current trends in solid-state physics is the study of materials in which long-range magnetic order and superconductivity coexist. Such materials are of interest not only from an academic point of view, but also from an applied one, since there is currently an active search for superconductors with triplet superconducting pairing (electrons in the Cooper pair have the same spin orientation). It is believed that such superconductivity is very likely to be observed in magnetic superconductors with superconducting electrons bonding via spin fluctuations rather than phonons as in conventional ones. Triplet superconductivity is a necessary component for the artificial creation of Majorana states, which would be stable for a long time and resistant to external influences, and on the basis of which one expects to create qubits for quantum computers [1-2].

Convenient objects for elucidating aspects of the coexistence of superconductivity and long-range magnetic ordering are rare-earth borides of rhodium with dysprosium, which have a tetragonal volume-centered crystal structure of the $LuRu_4B_4$-type. In these materials, the transition to magnetically ordered and then superconducting states is observed as the temperature decreases. It is not uncommon for magnetism to coexist with superconductivity in such materials down to the lowest temperatures [3, 4], and thus there is a high probability that triplet superconducting pairing is present.

In this work, we review our results on the study of superconductivity in rare-earth rhodium borides with dysprosium, and describe unusual phenomena and behaviors of superconducting properties that have been observed and may indicate the presence of unusual superconductivity.

In [3] we have shown that in $Dy_{1-x}Y_xRh_4B_4$ compounds the magnetic ordering temperature (T_M) decreases from 37 K in $DyRh_4B_4$ to 7 K in $Dy_{0.2}Y_{0.8}Rh_4B_4$ as the concentration of non-magnetic Y increases. In contrast, the superconducting transition temperature (T_c) increases with increasing Y concentration from 4,7 K for $DyRh_4B_4$ to 10.5 K for YRh_4B_4 [3]. Data from heat capacity measurements of the compounds $Dy_{0.8}Y_{0.2}Rh_4B_4$, $Dy_{0.6}Y_{0.4}Rh_4B_4$ and $Dy_{0.6}Y_{0.4}Rh_{3.85}Ru_{0.15}B_4$ indicate that another

magnetic transformation takes place below the superconducting transition temperature (T_{M2} = 1.5÷2.7 K) [4, 5]. Intriguing was the discovery in $Dy_{1-x}Y_xRh_4B_4$ (x = 0.2, 0.3, 0.4 and 0.6) of the paramagnetic Meissner effect (Wohlleben effect): when cooled in a weak magnetic field, a jump with a positive value of the moment is observed in the temperature dependence of the magnetization below the superconducting transition temperature instead of a negative diamagnetic one, as is typical for conventional superconductors [6]. In addition, in $Dy_{1-x}Y_xRh_4B_4$ (x = 0, 0.2, 0.4 and 1) non-monotonic behavior of the $H_{c2}(T)$ and $\Delta(T)$ dependences [4, 7] and a strong dependence of $H_{c2}(T)$ and $R(T)$ on the slope of the external magnetic field [8] were discovered. All these results did not fit well into the framework of the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) theory for conventional superconductors and could be one piece of evidence for the presence of an unconventional mechanism of superconducting pairing.

It is known that partial replacement of rhodium by ruthenium in $Dy_{1-x}Y_xRh_4B_4$ can lead to a change in the type of magnetic interactions in the Dy subsystem, due to a change in the electronic structure and, as a consequence, the RKKY-exchange interaction, which determines the type of magnetic ordering. As a result of such a replacement, the superconducting transition temperature also changes. Our studies of the superconductor $Dy_{0.6}Y_{0.4}Rh_{3.85}Ru_{0.15}B_4$ [9] have shown that this compound exhibits ferromagnetic ordering, which coexists with superconductivity at low temperatures. The stimulation of superconductivity (superconducting gap - Δ) by an external magnetic field and the value of the ratio $2\Delta/k_BT_c > 4$, which exceeds the value of 3.52 for conventional singlet superconductors, were detected by Point-contact Andreev reflection spectroscopy [10].

All of the above suggests that the studied class of superconductors is likely to exhibit an unconventional mechanism of superconducting pairing, making these materials potential candidates for triplet superconductors.

[1] X. Liu, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B, 92, 014513 (2015).
[2] G. Livanas, M. Sigrist, and G. Varelogiannis, Sci. Rep., 9, 6259 (2019).
[3] V.M. Dmitriev, A.J. Zaleskii, E.P. Khlybov, L.F. Rybaltchenko, E.V. Khristenko, L.A. Ishchenko and A.V. Terekhov, Acta Phys. Polon. A, 114, 83 (2008).
[4] V.M. Dmitriev, A.J. Zaleskii, E.P. Khlybov, L.F. Rybaltchenko, E.V. Khristenko, L.A. Ishchenko, A.V. Terekhov, I.E. Kostyleva and S.A. Lachenkov, Low Temp. Phys. 34, 909 (2008).
[5] A.V. Terekhov, I.V. Zolochevskii, L.A. Ishchenko, A. Zaleski, E.P. Khlybov, S.A. Lachenkov, Low Temp. Phys. 42, 232 (2016).
[6] V.M. Dmitriev, A.V. Terekhov, A. Zaleski, E.N. Khatsko, P.S. Kalinin, A.I. Rykova, A.M. Gurevich, S.A. Glagolev, E.P. Khlybov, I.E. Kostyleva, S.A. Lachenkov, Low Temp. Phys. 38, 154 (2012).
[7] V.M. Dmitriev, A. Zaleski, E.P. Khlybov, L.F. Rybaltchenko, E.V. Khristenko,

L.A. Ishchenko, A.V. Terekhov, Low Temp. Phys. 35, 424 (2009).
[8] A.V. Terekhov, I.V. Zolochevskii,E.V. Khristenko,L.A. Ishchenko, E.V. Bezuglyi,A. Zaleski, E.P. Khlybov, S.A. Lachenkov, Physica C. Superconductivity and its Applications, 524, 1 (2016)
[9] A.V. Terekhov, I.V. Zolochevskii, L.A. Ischenko, A.N. Bludov, A. Zaleski, E.P. Khlybov, S.A. Lachenkov, Low Temp. Phys. 45, 1241 (2019).
[10] L.F. Rybaltchenko, E.V. Khristenko, L.A. Ishchenko, A.V. Terekhov, I.V. Zolochevskii, T.V. Salenkova, E.P. Khlybov, A.J. Zaleski, Low Temp. Phys. 38, 1106 (2012).

ELECTRICAL RESISTANCE AND MAGNETORESISTANCE IN $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$

V.M. Yarovyi[1], A.V. Terekhov[1], K. Rogacki[2], A.L. Solovjov[1,2]

[1]*B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*
[2]*Institute for Low Temperatures and Structure Research, Polish Academy of Sciences, Wroclaw, Poland*
e-mail: yarovyi@ilt.kharkov.ua

Bismuth possesses unique electronic properties. Recent studies have indicated that specific electrons in bismuth can be regarded as massive Dirac fermions [1-3]. It has also been shown that bismuth can be used in a relatively new area of modern electronics – valletronics [3-5], which uses the valley degree of freedom to carry quantum information in multivalent semiconductors or semi-metals, including bismuth [5]. Research has shown that bismuth can achieve complete valley polarization in strong magnetic fields [5-6], suggesting that valley-based quantum qubits may be possible in the future [5-7].

Obviously, bismuth compounds exhibiting some of the unique electronic properties of bismuth are also of considerable interest from both an applied and a scientific point of view. Among these materials, BiMn alloys are particularly noteworthy. BiMn is a ferromagnetic material with a high Curie temperature ($T_C \approx 633$ K) [8] and exhibits high coercivity even at room temperature. As temperature increases, coercivity values can exceed those of rare earth permanent magnets [8, 9]. This high coercivity, combined with the lower cost of rare earth magnets, makes BiMn alloys promising for high temperature applications. It is worth noting that the electrical transport properties in these materials are still largely unexplored and may reveal behaviour no less interesting than the magnetic properties. Research by our group has shown that the compound $Bi_{95.69}Mn_{3.69}Fe_{0.62}$, which contains a small amount of manganese, exhibits a colossal positive anisotropic magnetoresistance and an unusual behaviour of the temperature dependence of the electrical resistance in magnetic fields [10, 11].

The aim of this work is to investigate how the $R(T)$ behaviour changes in magnetic fields with increasing manganese content. Specifically, we will study the temperature dependence of the resistance in a $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ compound under magnetic fields up to 90 kOe.

The samples were obtained by crystallization using the Bridgman method. This growth method can produce single-crystalline or textured polycrystalline samples. Textured polycrystals were obtained in our case.

Resistive and magnetoresistive measurements of $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ compound were performed using a standard four-probe circuit on automated setup (PPMS) from Quantum Design. Measurements were performed at alternating current (I = 15 mA, f = 19 Hz) directed along the larger sample size, both without field and in transverse and perpendicular to the current magnetic fields up to 90 kOe in the temperature range 2÷300 K.

The textured polycrystalline sample $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ contained two phases: a bismuth matrix and magnetic inclusions of the α-BiMn phase. In the absence of an external magnetic field, the metallic behaviour of $R(T)$ is observed, manifested by a decrease in resistance with decreasing temperature. In a magnetic field, the temperature dependence of electrical resistivity changes significantly. The maxima appear on $R(T)$. It has been observed that the temperatures of maxima (T_{max}) shift towards higher temperatures with increasing field strength. Temperature dependences of magnetoresistance $MR = ([R(H) - R(0)]/R(0))*100$ % have been plotted for different magnetic fields. It was observed that magnetoresistance rises with an increasing magnetic field, reaching approximately 3300% and 394% at 90 kOe for $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{I}$ and $\boldsymbol{H} \parallel \boldsymbol{I}$, respectively. Analysis of the $MR(T)$ in $Bi_{95.69}Mn_{3.69}Fe_{0.62}$ and $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ reveals that, with higher manganese content, the magnetoresistance magnitude also increases. Specifically, the MR values were found to be around 3300% and 2883% for $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{I}$ in $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ and $Bi_{95.69}Mn_{3.69}Fe_{0.62}$, respectively. Similarly, MR values for $\boldsymbol{H} \parallel \boldsymbol{I}$ were approximately 394% and 235% in $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$ and $Bi_{95.69}Mn_{3.69}Fe_{0.62}$, respectively.

The behavior of $R(T)$ in $Bi_{88.08}Mn_{11.92}$, both with and without an applied magnetic field, is largely influenced by the internal magnetism of the α-BiMn phase and can be interpreted within the context of multi-band theory.

[1] L. Li, J. G. Checkelsky, Y. S. Hor, C. Uher, A. F. Hebard, R. J. Cava, and N. P. Ong, Science. **321**, 547 (2008).
[2] Y. Fuseya, M. Ogata, and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Japan **84**, 012001 (2015).
[3] A. Iwasa, A. Kondo, S. Kawachi, K. Akiba, Y. Nakanishi, M. Yoshizawa, M. Tokunaga, and K. Kindo, Sci. Rep. **9**, 1672 (2019).
[4] D. Xiao, W. Yao, and Q. Niu, Phys. Rev. Lett. **99**, 236809 (2007).
[5] Z. Zhu, A. Collaudin, B. Fauqué, W. Kang, and K. Behnia, Nat. Phys. **8**, 89 (2012).
[6] Z. Zhu, J. Wang, H. Zuo, B. Fauqué, R. D. McDonald, Y. Fuseya, and K. Behnia, Nat. Commun. **8**, 15297 (2017).
[7] J. Pawłowski, M. Bieniek, and T. Woźniak, Phys. Rev. Appl. **15**, 054025 (2021).
[8] B. W. Roberts, Phys. Rev. **104**, 607 (1956).

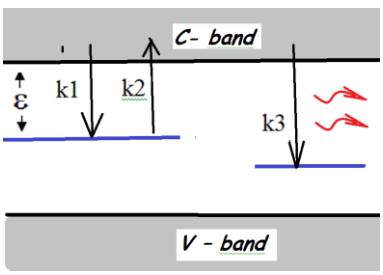
[9] N. V. Rama Rao, A. M. Gabay, and G. C. Hadjipanayis, J. Phys. D. Appl. Phys. **46**, 062001 (2013).
[10] A. V. Terekhov, A. L. Solovjov, A. I. Prokhvatilov, V. V. Meleshko, I. V. Zolochevskii, J. Cwik, A. Los, A. D. Shevchenko, O. M. Ivasishin, and Z. D. Kovalyuk, East Eur. J. Phys. **4**, 12 (2017).
[11] A. V. Terekhov, K. Rogacki, A. L. Solovjov, A. N. Bludov, A. I. Prokhvatilov, V. V. Meleshko, I. V. Zolochevskii, E. V. Khristenko, J. Cwik, A. Los, A. D. Shevchenko, Z. D. Kovalyuk, and O. M. Ivasishin, Low Temp. Phys. **44**, 1153 (2018).

МЕТОД СКЕЙЛІНГУ В ТЕОРІЇ ДОЗИМЕТРІЇ

П.В. Яворський
Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
e-mail: petro0798@gmail.com

Відомими є проблеми теорії, що описує кінетичні процеси для багаторівневих систем, наприклад, у газових, лазерних середовищах, а також для задач дозиметрії. Вони полягають у тому, що величини, які фігурують в цих параметрах, можуть мати величини порядку $10^{15} – 10^{17}$ см$^{-3}$ та відрізнятися на 5-6 порядків. Тому, як правило, їх розв'язок знаходять на основі різних наближень, використовуючи припущення, що не завжди є очевидними.

Сучасна дозиметрія ґрунтується на визначенні величини енергії, яка акумулюється у речовині при дії ядерних частинок [1]. Так, величина запасеної енергії може суттєво впливати на спектри випромінювання, стимульовані нагрівом (термостимульована люмінесценція, ТСЛ), чи оптичним опроміненням (оптично стимульована люмінесценція). Останнім часом було встановлено[1], що дослідження спектрів люмінесценції опромінених зразків в залежності від температури нагріву, чи часу спостереження дозволяє встановити структуру їх енергетичних рівнів у забороненій зоні, а також значення кінетичних параметрів, що визначають кінетику випромінювальних переходів. Як правило, теорія, що описує ТСЛ базується на моделі OTOR (*one-trap-one-recombination center model)* вперше запропонованій для пояснення явища фосфоресценції у твердих тілах [2]. Рис.1 представляє енергетичну схему OTOR та систему кінетичних рівнянь, що описують переходи між її енергетичними рівнями. Під дією радіації відбувається перерозподіл носіїв заряду дозиметричного матеріалу, тому концентрація електронів у зоні провідності стає рівною n_1, а на рівнях пасток, відповідно, n_2.



a)

$$dn_1(t)/dt = -dn_2(t)/dt + dn_3(t)/dt$$
$$dn_2(t)/dt = k_1 * n_1(t) * (N - n_2(t)) - k_2 * n_2(t) * \exp(-\varepsilon/kT)$$
$$dn_3(t)/dt = k_3 * n_1(t) * n_3(t)$$

b)

Рис.1 a) - енергетична схема та b) – структура рівнянь, що описують кінетику переходів носіїв заряду у для моделі OTOR [2].

Тут параметри, приведені на Рис.1, мають наступні значення: k_1 – інтенсивність захоплення носіїв заряду пастками, k_2 – швидкість їх вивільнення у зону провідності внаслідок теплової емісії, k_3 – інтенсивність електрон-діркової рекомбінації із випромінюванням світла та N -концентрацію рівнів захоплення. Попри простоту системи диференціальних рівнянь, Рис. 1 b), у літературі відсутні приклади її *ab initio* розв'язків. Це зумовлено проблемами інтегрування таких рівнянь для великих значень концентрацій n_1, n_2, що робить використання існуючих обчислювальних методів практично неможливим. Тому сучасна теорія дозиметричних процесів базується на численних наближеннях, таких як $n_1 << n_2$, різні співвідношення коефіцієнтів $k_1 – k_4$, а також припущення $n_2 << N$.

Вирішення цієї задачі можливе при використанні методу скейлінгу, реалізованого у пакеті Lumini [3]. Цей підхід дозволяє екстраполювати результати, отримані в одних умовах, на інші, використовуючи принципи подібності та масштабування. Основою методу є припущення, що фізичні процеси в твердотільних дозиметрах можна описати масштабними функціями, які зберігають свою форму при зміні таких параметрів, як розміри системи, час або інші характеристики. Наприклад, якщо в системі певний процес протікає з певною швидкістю, то зміна розмірів системи може впливати на швидкість цього процесу відповідно до визначених закономірностей. Запропонований метод діє на всі класи кінетичних рівнянь.

В даній роботі для розв'язку системи рівнянь Рис.1 b) вводиться процедура скейлінгу, використовуючи масштабне перетворення фізичних величин. Здійснюються наступні перетворення параметрів кінетичних рівнянь Рис.1 b), тут *i=1 – 3*:

$$n_i^*(t) = \frac{n_i(t)}{n_1^0 + n_2^0} \bullet A, \quad k_i^* = k1 \bullet N, \quad k_2^* = k_2 \bullet \frac{n_1^0 + n_2^0}{A}, \quad k_3^*(t) = \frac{n_2(t)}{N} \qquad (2)$$

Масштабуючий множник A може мати різні значення, враховуючи порядок величини початкових параметрів n_1^0, n_2^0. Використовуючи перетворення (2) можна проводити числове моделювання для довільних умов дозиметричного експерименту, а також запропонувати метод виходу за рамки однорівневого наближення. Такі можливості були реалізовані в пакеті Lumini, що базується на алгоритмі розв'язання системи (4) методом Рунге Кутта 4-го порядку при початкових значеннях $n_1^*(0) = n_1^0, n_2^*(0) = n_2^0$. Це дозволяє обробляти експериментальні дані по ТСЛ за допомогою пакета Lumini та визначати кінетичні коефіцієнти моделі OTOR. Приклад вирішення такої задачі приведено на Рис.2, при обробці спектру ТСЛ Al_2O_3 дозиметра. Точність такої підгонки

через критерій FOM[1] не перевищує 8%, що дозволяє встановити значення рівня пастки 1,35 еВ та частотного фактору 10^{13} c^{-1} [3].

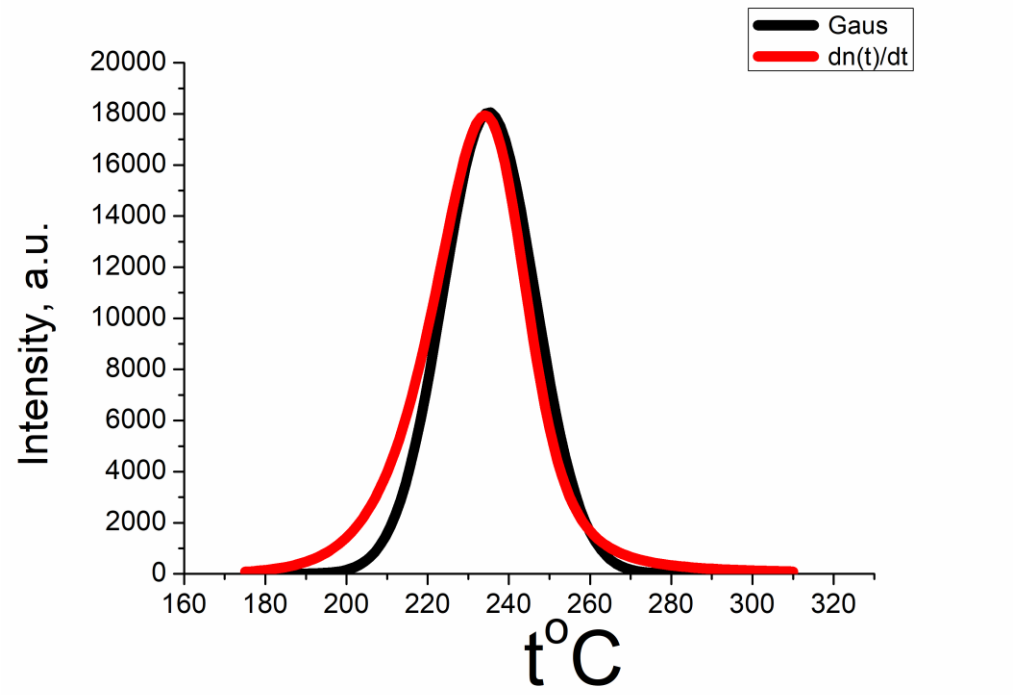


Рис. 2.Результат підгонки експериментальної залежності (чорна крива) піку висвічування ТСЛ на основі Al_2O_3 пакетом Lumini (червона крива)

Отже, застосування процедури скейлінгу дало змогу виконати ab initio розрахунки люмінесцентних характеристик дозиметричних матеріалів без використання наближень. У майбутньому запропонована модель може розширити можливості методу для оцінки енергетичної структури та кінетичних коефіцієнтів реальних дозиметричних матеріалів.

1. C. Furetta, *Handbook Of Thermoluminescence*. World Scientific Publishing Company 564 p. (2003). https://doi.org/10.1142/5167.
2. Adirovitch E.I. La formule de Becquerel et la loi elementaire du decline de la luminescence des phosphores cristallins. *J. Phys. Rad*. 1956. 17. 705. 10.1051/jphysrad:01956001708-9070500.
3. P.V. Yavorskyi. Lumini package for ab initio modeling of dosimetric experiments. Problems of atom ic science and technology(PAST) ISSN 1562-6016 https://doi.org/10.46813/2024-153-154

APPLICATIONS OF SYMMETRIC AND SUPERSYMMETRIC POLYNOMIALS IN QUANTUM MECHANICS

R.O. Hryniv, T.V. Vasylyshyn, A.V. Zagorodnyuk

Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine
e-mail: rhryniv@ucu.edu.ua
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
e-mail: taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua, andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua

Connections between symmetric polynomials and statistical mechanics were considered by many authors (see e.g. [1], [2], [3]). In particular, so-called complete symmetric polynomials can be used for a representation of the canonical partition function of the boson ideal gas, and elementary symmetric polynomials for fermion ideal gas. In this talk we will observe that some bases of supersymmetric polynomials [4] can be useful for a representation of the canonical partition function of an ideal gas consisting of both fermions and bosons. Also, we will discuss the case when the series for the canonical partition function of the system diverges but becomes well-defined in the ℓ_p-sense. For this purpose, we can use algebraic bases for symmetric and supersymmetric polynomials on ℓ_p.

In addition, we will consider quantum gases with entanglement particles. For this case, it is possible to use block-symmetric and block-supersymmetric polynomials [5]. Some other applications of block-symmetric polynomials for the quantum product of symmetric functions were proposed in [6].

This research was supported by the National Research Foundation of Ukraine, 2023.03/0198.

[1] A.D. Balantekin, Phys. Rev. E. 64, 066105/1-066105/8, (2001).
[2] H.-J. Schmidt, J. Schnack, Am. J. Phys. 70, 53-57, (2002).
[3] I. Chernega, M. Martsinkiv, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk, Quantum Rep. 5, 683-697, (2023).
[4] F. Jawad, A. Zagorodnyuk, Symmetry. 11, 1111, (2019).
[5] V. Kravtsiv, Symmetry. 16, 179, 2024.
[6] R. Diaz, E. Pariguan, Int. J. Math. Math. Sci. 2015, 476926, (2015).

JOINT QUANTUM-CLASSICAL HAMILTON VARIATION PRINCIPLE IN THE PHASE SPACE

Dmitry V. Zhdanov, Denys I. Bondar

Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA

E mail: dm.zhdanov@gmail.com

Overview: At first glance, the Hamiltonian variation principle might seem inapplicable to quantum particles as they lack well-defined trajectories. This work introduces a method to overcome this limitation by employing the Husimi representation of quantum mechanics. Discovered in 1940, the Husimi representation is closely related to the Wigner function, whose evolution equation mirrors the Liouville equation in classical statistical mechanics. Here, we show that this similarity is not coincidental: both quantum and classical mechanics follow from closely related Hamiltonian variation principles. The core difference between the two principles is in the definition of variations, which must preserve either the point-like nature of classical particles or the quantum state purity. We provide a detailed explanation of how the joint Hamiltonian principle can benefit modern computational quantum chemistry.

Core ideas: Quantum mechanics relies on the canonical commutation relation $[\hat{p},\hat{x}]=-i\hbar$ between the momentum and position operators of quantum particles. The representations of quantum mechanics vary in how they realize this relationship. For instance, the choice $\hat{x}=x,\ \hat{p}=-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}$ leads either to the familiar Schrodinger equation $i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)$ for wavefunction $\psi(x,t)$ and Hamiltonian $\hat{H}$ in the position representation, or to the quantum Liouville equation

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\rho}=[\hat{H},\hat{\rho}], \tag{1}$$

if one chooses to work with the density matrix $\hat{\rho}$. However, it is equally feasible to pick the so-called Bopp representation

$$\hat{x}=x+i\tfrac{\hbar}{2}\,\tfrac{\partial}{\partial p}=x\star,\ \ \hat{p}=p-i\tfrac{\hbar}{2}\,\tfrac{\partial}{\partial x}=p\star, \tag{2}$$

where $\star$ is the differential Moyal star product operator. In this case, the Liouville equation (1) becomes [1]

$$i\hbar\,\tfrac{\partial}{\partial t}\,W(p,x)=H\star W(p,x)-W(p,x)\star H, \tag{3}$$

where $W(p,x)$ is the Wigner function.

We discovered an alternative, continuity-equation-like form for Eq. (3)

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,W(p,x)=-\nabla\cdot\mathbf{J}(p,x)=-\tfrac{\partial}{\partial p}\cdot J_p-\tfrac{\partial}{\partial x}\cdot J_x \tag{4}$$

with simple and elegant closed-form expressions for the components of flow **J** for any multidimensional analytical Hamiltonian *H*. However, an important distinction exists

between Eq. (4) and the classical continuity equation for probability distributions: although the function $W(p,x)$ is real-valued and normalized, it assumes both positive and negative values. Its evolution resembles the charge redistribution in a plasma, where the total charge remains conserved, but the quantities of positive and negative charges fluctuate due to charge separation and recombination.

Fortunately, quantum mechanics offers a way to fully resolve the negativity of the Wigner function through convolution (denoted as $*$) with a Gaussian kernel

$$Q(p,x) \propto W(p,x) * \exp(-\tfrac{x^2}{2\sigma_x^2} - \tfrac{p^2}{2\sigma_p^2}), \tag{5}$$

provided that the standard deviations σ_x and σ_p satisfy $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2$. The resulting Husimi function $Q(p,x)$ is normalized, non-negative, and satisfies the analytical continuity equation in the form of Eq. (4). Thus, the Husimi function evolves in time like a multidimensional flow $\mathbf{J}^{\mathrm{Q}}$ of an effective compressible probability fluid. However, do the trajectories of the elementary parcels of this fluid satisfy a variation principle akin to that in classical statistical mechanics?

To answer this question, we observe that classical statistical mechanics represents the limiting case of Wigner representation rather than its blurred Husimi counterpart. To match apples to apples, let us introduce the *classical Husimi function* C derived from the classical probability distribution via the same convolution transform as in Eq. (5). Notice that the point particles in C-representation constitute Gaussian blobs, like the coherent states in Q-representation, and varying a single trajectory would break the particle pointness. Thus, the Hamilton variation principle in C-representation should apply to infinite swarms of trajectories representing point particles rather than to individual trajectories. We call such variations *admissible*. The second point to notice is that the states dynamics in C-representation are defined up to arbitrary circulations $\mathbf{J}^{C}$, which preserve the shapes of the point-particle blobs. This flexibility suggests that the Hamilton variation principle in C-representation includes additional gauge freedom in its action functional, hereafter termed *Skodje gauge freedom*, after the pioneering paper that examined this concept in detail [2].

Returning to quantum mechanics, we use analytical expressions for $\mathbf{J}^{\mathrm{Q}}$ to establish the analogous Hamilton variation principle for the quantum Husimi function $Q(p,x)$. The primary distinction is that the admissible variations are now defined as preserving the purity of quantum states. Ref. [3] provides the complete formulation.

Applications. The joint Hamilton variation principle unifies all known phase space representations of classical and quantum mechanics, including enigmatic Bohmian mechanics [4]. The latter appears to be a limiting form of the Husimi representation, characterized by a degenerate convolution kernel and a distinct Skodje gauge. Beyond

its pedagogical value, the joint Hamiltonian variation principle is a powerful tool to enhance a broad class of semi-classical initial value representations. Specifically, quantum many-body simulations widely apply Heller's ansatz [5], which models a time-dependent wavefunction as a superposition of coherent states evolving along semi-classical trajectories. Our results indicate that using Husimi trajectories under an optimized Skodje gauge in place of conventional semi-classical trajectories can significantly improve the numerical performance of these simulations. This approach, in particular, enables accurate modeling of quantum tunneling phenomena [6].

References.

[1] A. Polkovnikov, Ann. Phys. (New York) **325**, 1790–1852 (2010).
[2] R. T. Skodje, H. W. Rohrs, and J. VanBuskirk, Phys. Rev. A **40**, 2894 (1989).
[3] D. V. Zhdanov and D. I. Bondar, J. Phys. A: Math. Theor. 10(55), 104001 (2022).
[4] E. Madelung, Z. Phys. 40, 322 (1927).
[5] E. J. Heller, J. Chem. Phys. 62, 1544 (1975).
[6] D. V. Zhdanov and D. I. Bondar, arXiv:2007.14691 [quant-ph].

DARK ENERGY AND DARK MATTER – UNRESOLVED PROBLEMS IN THEORETICAL PHYSICS

R.R. Lompay[1], V.M. Simulik[2], T.M. Zajac[1]

[1]Uzhhorod National University, Dep. of Electronic Systems, Uzhhgorod, Ukraine
E-mail: robert.lompay@uzhnu.edu.ua;taras.zajac@uzhnu.edu.ua
[2]Institute of Electron Physics of the NAS, Uzhhorod, Ukraine
E-mail: vsimulik@gmail.com

In 1900, William Thomson (Lord Kelvin) declared that physics was complete, save for two minor "clouds" on the horizon. These "clouds" ultimately led to quantum theory and the theory of relativity. Today, we again face two such "clouds": dark matter and dark energy. History seems to be repeating itself. Over a century ago, the breakthrough came in 1925 with Werner Heisenberg's seminal paper [1], marking the birth of quantum mechanics as a distinct field of theoretical physics. By that time, the general theory of relativity (GTR) was already well-established, finding its first applications and undergoing further development. It is conceivable that in the coming years, the challenges posed by dark matter and dark energy might also be resolved. Some groundwork for this has already been laid (see reviews [2–11]). However, the sheer number of proposed approaches might also signal a potential lack of clarity in tackling these problems. Below, we briefly examine some of the possible solutions to these challenges.

1. Unifying GTR and Quantum Theory. This is the quest for a more comprehensive theory of nature, often termed the problem of quantum gravity. Both theories encounter issues with infinities, giving rise to the well-known problem of justifying quantum mechanics—a second major challenge in modern physics.

2. Resolving Quantum Mechanics Foundations. This could involve either providing a coherent interpretation of the existing framework or creating an entirely new theory. Several approaches exist. (i) Establishing a meaningful language that incorporates the division of the world into a system and observer as a core feature. (ii) Proposing a new interpretation of the theory that eliminates the dependence on measurements or observations in describing fundamental reality. (iii) Developing a novel theory that provides a deeper understanding of nature than current quantum mechanics.

3. Unifying Particles and Forces. This involves determining whether the various particles and forces can be explained as manifestations of a single, fundamental entity. Without quantum mechanics, unified theories are straightforward to formulate. However, incorporating quantum mechanics greatly complicates the task, as gravity, one of the four fundamental forces, must also be addressed within the framework of quantum gravity.

4. Explaining the Constants of Nature. How are the values of the free parameters in the Standard Model of particle physics determined? For instance, astronomers have used two methods to measure the mass distribution in galaxies. (i)

By observing the orbital velocities of stars. (ii) By estimating the mass of visible matter, such as stars, planets, gas, and dust.

These methods, applied to over a hundred galaxies, show a consistent discrepancy of an order of magnitude, implying the presence of unseen matter—dark matter.

5. Addressing Dark Energy and Cosmic Expansion. Observations at vast scales reveal that even with dark matter accounted for, the universe's expansion (triggered by the Big Bang 13.7 billion years ago) is accelerating, contrary to expectations. This could suggest that: (i) GTR is incorrect on cosmic scales. (ii) A new form of energy–dark energy–dominates on large scales, causing accelerated expansion.

Recent measurements suggest the universe comprises approximately 70% dark energy, 26% dark matter, and only 4% ordinary matter. These figures underscore the pressing need to explain the roles of dark matter and dark energy [12]. Cosmological measurements have become significantly more precise over the past few decades, aided by Moore's Law, which predicts a doubling of computational power approximately every 18 months. This has allowed for more detailed observations of the universe's fundamental characteristics, such as total matter density and expansion rate. While a Standard Model of Cosmology now exists, much like the Standard Model of particle physics, its free parameters remain unexplained by theory and must instead be determined through observation. [13].

[1] W. Heisenberg, Z. Phys. **33**, 879 (1925).
[2]. A. N. Tawfik, E. A. E. Dahab, Gravitation and Cosmology, **25**, 103, (2019).
[3]. M.J. Baker, J. Kopp, A.J. Phys. Rev. Lett., **37**, 125, (2020).
[4]. A. Bandyopadhyay, A. Chatterjee, Research in Astron. Astrophys. **2**, 21,(2021).
[5]. G. Bertone, D. Hooper, Rev. Mod. Phys. **90**, 045002-1, (2018).
[6]. P. D. Mannheim, Progress in Particle and Nuclear Physics **56**, 340, (2006).
[7]. A. Carmona, J. C.Ruiz, M. Neubert. Eur. Phys. J. **81**, 58, (2021).
[8]. B. Carr, F. Kühnel. Annual Review of Nuclear and Particle Science. **70**, 355, (2020).
[9]. T. Hu. W.Hiramatsu, K. Koyama, F.Schmidt F. Phys. Rev. D **87,** 063525 (2013).
[10]. L. Lombriser, A. Slosar, U. Seljak, W. Hu. Phys. Rev. D **85**,124038 (2012).
[11]. I.D.Saltas, I. Sawicki, L. Amendola, M. Kunz M. Phys. Rev. Lett. **113**,191101 (2014).
[12] L. Smolin. The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of a science, and what comes next. – (A Mariner Book, Houghton Mifflin Company, Boston-New-York, 2007); 392 p.
[13] S. Weinberg. Dreams of a final theory. – (Vintage Books a Division of Random House, Inc. New York. 2004, 256 p.)

METAPHYSICS AND THEORETICAL PHYSICS

R.R. Lompay[1], V.M. Simulik[2], T.M. Zajac[1]

[1]*Uzhhorod National University, Dep. of Electronic Systems, Uzhhgorod, Ukraine*
E-mail: robert.lompay@uzhnu.edu.ua;taras.zajac@uzhnu.edu.ua
[2]*Institute of Electron Physics of the NAS, Uzhhorod, Ukraine*
E-mail: vsimulik@gmail.com

In fundamental theoretical physics of the 20th century, the key conceptual questions and problems were those that had been at the core of philosophical and theological inquiry for two and a half millennia. By exploring a vast area of nature, from the properties of the Universe as a whole to the most elementary elements of the cosmos at the microscopic level, physics helps uncover extremely important metaphysical principles that permeate all spheres of existence, from elementary particles to biological and spiritual life. Physics deals with simpler systems that can be described by strict mathematical models, allowing less significant factors to be separated from the key ones. Within the framework of fundamental theoretical physics, one can examine and formulate general principles of metaphysics that have universal significance. There are two approaches to analyzing reality: holistic and reductionist. Holism is based on an understanding of the world in which the whole is seen as dominant and preceding its parts. Reductionism, on the other hand, breaks the whole down into parts that are perceived as prior to the whole. Both approaches have played an important role and complemented each other in the process of understanding the world. Reductionism dominates in the development of ideas about the structure of matter. Holism can be seen in the works of ancient thinkers, in the efforts of René Descartes and other philosophers of the modern era to construct a monistic view of the world. The ideas of holism were of particular importance in the 20th century, which manifested in theoretical attempts to unify known types of physical interactions, build a unified field theory, or geometrise all of physics.

Considering different branches of theoretical and mathematical physics, one can overlook the manifestation of triadic structures. The key instances of this are as follows.

1. Physical space has three dimensions. The question of "Why is space three-dimensional?" was raised by E. Mach. Later, the concept of space was generalised by A. Einstein, A. Eddington, P. Ehrenfest, and others.

2. Time is one-dimensional, yet within it, we distinguish the past, present, and future, again exhibiting a triadic structure.

3. The development of general relativity is closely linked to the attempts to prove Euclid's fifth postulate. This problem was resolved in the works of C.F. Gauss, M.I. Lobachevsky, and J. Boyai, leading to the discovery of the first non-Euclidean (hyperbolic) geometry. Later, B. Riemann formulated the second non-Euclidean

(spherical, elliptical) geometry. As a result, three types of geometries with symmetries became known.

4. These geometries were closely connected to the three possible behaviours of geodesics passing through a point outside a given line, parallel to the initial line: one line in Euclidean geometry, two (and thus infinitely many) in Lobachevskian geometry, or none in the space of Riemann with constant positive curvature.

5. The foundation of modern cosmology is based on three types of homogeneous isotropic solutions to Einstein's equations: a closed model with a three-dimensional spatial section described by Riemannian geometry, an open flat model with Euclidean geometry, and an open model with a spatial section described by Lobachevskian geometry.

6. Reference systems, which play an important role in the theory of relativity, are characterised by three physical-geometrical tensors: acceleration vector, antisymmetric tensor of angular velocity of rotation, and symmetric tensor of deformation velocities.

7. The differential geometry of Schouten, used as the foundation of general relativity, is characterised by three and only three tensor quantities: torsion, sectional curvature, and the third Schouten (the difference in connections for transporting co- and contravariant tensors).

8. In microphysics, there are three dominant types of fundamental interactions: electromagnetic, weak, and strong. In electroweak theory, there are three generations of elementary particles. The matter that surrounds us is built from elementary particles of the first generation. In the theory of strong interactions, the elementary components of particles – quarks – can have one of three colour charges, which gave the theory its name: quantum chromodynamics. Baryons, the particles that participate in strong interactions, are made up of three quarks, which cannot be isolated due to confinement properties.

9. In classical physics, three types of dimensional quantities are used: length, time, and mass, while the physical theory in the general physics course operates with three key physical categories: spacetime, particles, and fields.

10. The physical theories and programmes of the 20th century were built within three types of dualistic paradigms, which united pairs of the aforementioned foundational physical categories into one generalised category. These paradigms were called the geometrical – general relativity, field-theoretical – quantum field theory, and relational – theories of direct inter-particle interactions.

11. Some world religions make significant reference to the triad – God the Father, God the Son, and the Holy Spirit.

It is not impossible that metaphysics may help resolve the urgent issues of explaining the nature of dark matter and dark energy in the Universe. When considering these problems, comparisons are often made with a fish in an aquarium, which will never be able to comprehend spacetime beyond the walls of its aquarium. Or the paradox of powerful and weak computers connected within one network. If the person at the powerful computer’s controls does not want it, the person by the weaker

computer will never learn of the existence or influence of the powerful machine on the network.

In the framework of metaphysics, there exists a simple explanation for the dark matter and dark energy of the Universe – the appeal to the multidimensionality of the Universe. In such a case, humanity can only study its own Universe. If the figure of 4% is correct, then beyond our Universe, there are 24 other universes that are inaccessible to our current methods of knowledge.

What can be done to remedy this? History from a century ago reminds us of the work of Werner Heisenberg, from which the theoretical foundations of quantum mechanics began. This famous scientist, based on mathematics, constructed his model of physical reality in terms of observable quantities. Perhaps, today, it would be worthwhile to build a model of the Universe based on modern mathematics, within the framework of principles that are not directly observable?

The consideration above is based on the publications [1–9].

[1]. E. W. J. W. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung, – (1883).
[2]. A. Einstein. Zur Eiektrodynamik der beivegter Korper. Ann. Phys., (1905), v.17, 891– 921; A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – (1915). – p. 844–847.; A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie // Annalen der Physik. – (1916). – v. 354,
is. 7. – p. 769–822.
[3]. Sir A. S. Eddington. Space Time and Gravitation. Cambridge at University Press, (1947), 247 p.
[4]. P. Ehrenfest, T. Ehrenfest. The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics. Cambridge at University Press (1932), 114 p.
[5]. J.C.F. Gauß. “Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae”. Göttingen: H. Dieterich, (1823). J.C.F. Gauß Allgemeine Studien zu gekrümmten Oberflächen. Grundlagen der Geometrie.(1834);J.C. F. Gauß, Werke, Bd. I - XII. Königl. Ges. d. Wissenschaften, Göttingen, (1870) ff. In Commission bei Teubner, Leipzig.
[6] J. Bolyai. Applicatio continens veram spatii scientiam absolutam a veritate vel falsitate Euclidis XI axiomatis. (1832), 243 p.
[7]. N.I. Lobatschewski. Études Geométriques. Théorie des paralléles. (1846), 176 p.
[8]. G.F.B. Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (1859), 116 p.
[9]. J.A.Schouten. Tensor Analysis for Physicists 2d edn., New York: Dover Publications, (1989); A.Nijenhuis, “J A Schouten: A Master at Tensors”, Nieuw archief voor wiskunde 20 (1972), p.1-19.

SEMICONDUCTOR HETEROSTRUCTURES WITH TUNNEL-COUPLED QUANTUM DOTS OF DIFFERENT SIZES AND MATERIALS: ENERGY SPECTRA AND WAVE FUNCTIONS

I.V. Bilynskyi[1], R.Ya. Leshko[2], M.V. Kvyk[1]

[1]*Physics Department, Kryvyi Rih State Pedagogical University, 54 Gagarin Avenue, 50086, Kryvyi Rih, Ukraine*
[2]*Physics Department, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 3 Stryiska Street, 82100 Drohobych, Ukraine*
e-mail: leshkoroman@gmail.com

Semiconductor heterostructures with quantum dots are actively studied due to their significance for both fundamental science and practical applications in microelectronics and optoelectronics. In particular, such structures are widely used in the development of semiconductor lasers. In most experiments, nanocrystals are randomly distributed within a matrix and are separated by distances significantly larger than their sizes. Modern technologies for producing quasi-zero-dimensional semiconductors have advanced to the point where it is now possible to create structures with closely spaced quantum wells. In the case of coupled quantum dots, electronic energy levels split due to the tunneling effect, which can be utilized for creating quantum switches in quantum processors. Injection lasers with an active region based on InGaAs/GaAs quantum dots exhibit ultra-high thermal stability of the threshold current density, with a characteristic temperature of about 350-400 K over a wide temperature range (80-150 K). The use of vertically coupled InAs quantum dots in a GaAs matrix has significantly improved the laser's performance, enabling ground-state generation at 300 K.

The aim of this study was to determine the energy spectra and wave functions of particles in a system of two coupled quantum dots of different sizes and materials. The system consists of two tunnel-coupled, spherical quantum dots. The plane wave expansion method was used for calculations. Energy spectra for different structures were computed, and the wave function was determined. The probability and probability density of an electron's presence in this heterosystem were also analyzed. To solve the Schrödinger equation, a variational method was employed. Additionally, the oscillator strength of the inter-dot exciton transition for this heterostructure was investigated.

INVESTIGATION OF THE ELECTRONIC SPECTRUM OF TETRAHEDRAL-SHAPED NANOCRYSTALS BASED ON SEMICONDUCTOR MATERIALS

I.V. Bilynskyi[1], R.Ya. Leshko[2], H.Ya. Bandura[2], Ya.Yu. Melnyk[1]

[1]Physics Department, Kryvyi Rih State Pedagogical University, 54 Gagarin Avenue, 50086, Kryvyi Rih, Ukraine, iv.bilynskyi@gmail.com
[2]Physics Department, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 3 Stryiska Street, 82100 Drohobych, Ukraine
e-mail: galinka.bandura@gmail.com

The development of technologies for synthesizing nanocrystals with complex three-dimensional architectures opens new possibilities for creating functional materials in microelectronics, optoelectronics, and energy. Nanocrystals in the form of tetrapods are of particular interest due to their potential applications as building blocks for solar cells and active components in nanoscale transistors. Their unique properties enable the creation of architectures that cannot be realized using spherical or cylindrical nanocrystals. The synthesis of CdSe tetrapod-like nanocrystals by thermal decomposition of organometallic precursors has led to the development of several other methods for synthesizing such structures. Recent studies have shown that semiconductor nanocrystals of group II-VI with complex shapes, such as fibers, tetrapods, and hyperbranches, can be grown by adjusting the initial concentrations of materials and the nature of surfactants. In particular, ideal CdTe tetrapods were synthesized with high yield, making them promising for applications in new functional materials.

The theoretical justification of the results was carried out using the plane wave expansion method. This method made it possible to thoroughly investigate the energy spectra and wave functions for the system of tetrapod-like nanocrystals. The plane wave expansion provides high accuracy in analyzing the behavior of electrons in such complex systems. As a result, particle wave functions were obtained, the probability density of their location in the three-dimensional heterosystem was determined, and specific features of electronic transitions in tetrapods were revealed. The oscillator strength of the transitions was also investigated, which is important for understanding the optical properties of these structures.

Thus, the synthesis and theoretical analysis of tetrapod-like nanocrystals demonstrate their significant potential for application in new functional materials, particularly in solar energy and nanoscale electronic devices.

This summary was written by the Organizing Committee in the absence, because of technical reasons, of an original text directly from Prof. Spalek in order to mark his oral report, which contains very interesting and useful results.

RIGOROUS SOLUTION AND ANALYSIS OF HEITLER-LONDON MODEL OF THE CHEMICAL BONDING: TRUE COVALENCY

Jozef Spałek

Nanotechnology Centrum at Jagellonian University, Kraków, Poland.
E-mail: jozef.spalek@uj.edu.pl

Author presented a detailed investigation of the electronic structure and bonding characteristics of hydrogen-based molecular systems (H_2^+, H_2, H_2^-) using the Exact Diagonalization Ab Initio (EDABI) approach within the framework of combined first- and second-quantization. By analyzing the relative contributions of kinetic exchange and effective Coulomb interactions, a comprehensive understanding of covalency, atomicity, and ionicity as a function of interatomic distances, was provided. Approach leverages exact solutions of the extended Heitler-London model to quantify these interactions, extending the analysis to the discussion of properties of excited states and the dissociation limit to these molecules.

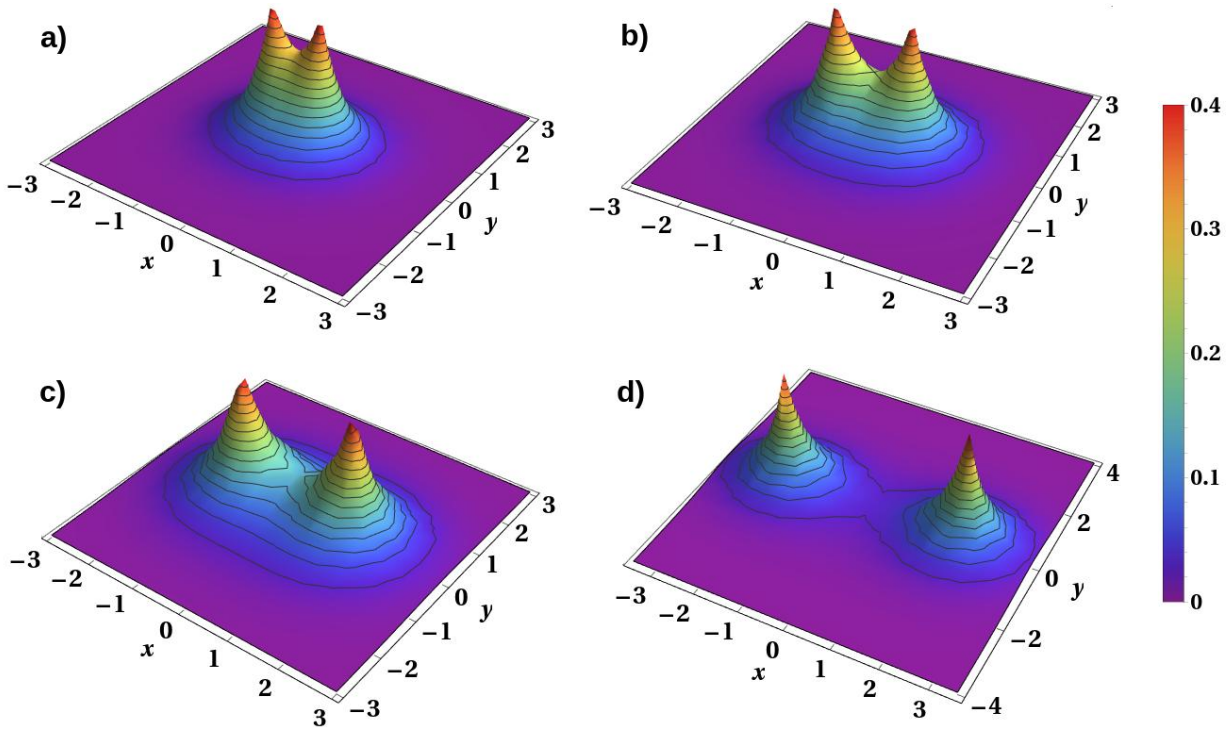


Figure 1: Electron density $n_\sigma(\mathbf{r})$ for different interatomic distance (a) $R=1\alpha_0^{-1}$, (b) $R=1{:}432\alpha_0^{-1}$, (c) $R=2{:}32\alpha_0^{-1}$, (d) $R=4\alpha_0^{-1}$.

The findings reveal significant differences in bonding characteristics, particularly highlighting the stability and bonding nature of the neutral H_2 molecule compared to its ionic counterparts. This study not only enhances an understanding of molecular interactions in hydrogen systems but also demonstrates the potential of the EDABI approach in developing more accurate computational models in quantum chemistry. The process under consideration is demonstrated on the figures 1.

The parts centered at nuclei are practically disjoint for R _ 5a0, illustrating the robustness of atomic behavior in that situation. This density contains also the double-occupancy (ionicity) contribution which becomes rapidly negligible with increasing R beyond R_{Mott}. The notation α^{-1} for the size of the orbital is used, the diameter of the orbital in the correlated state ($2\alpha_0^{-1}$) is equal to the interorbital distance R_{Mott}.

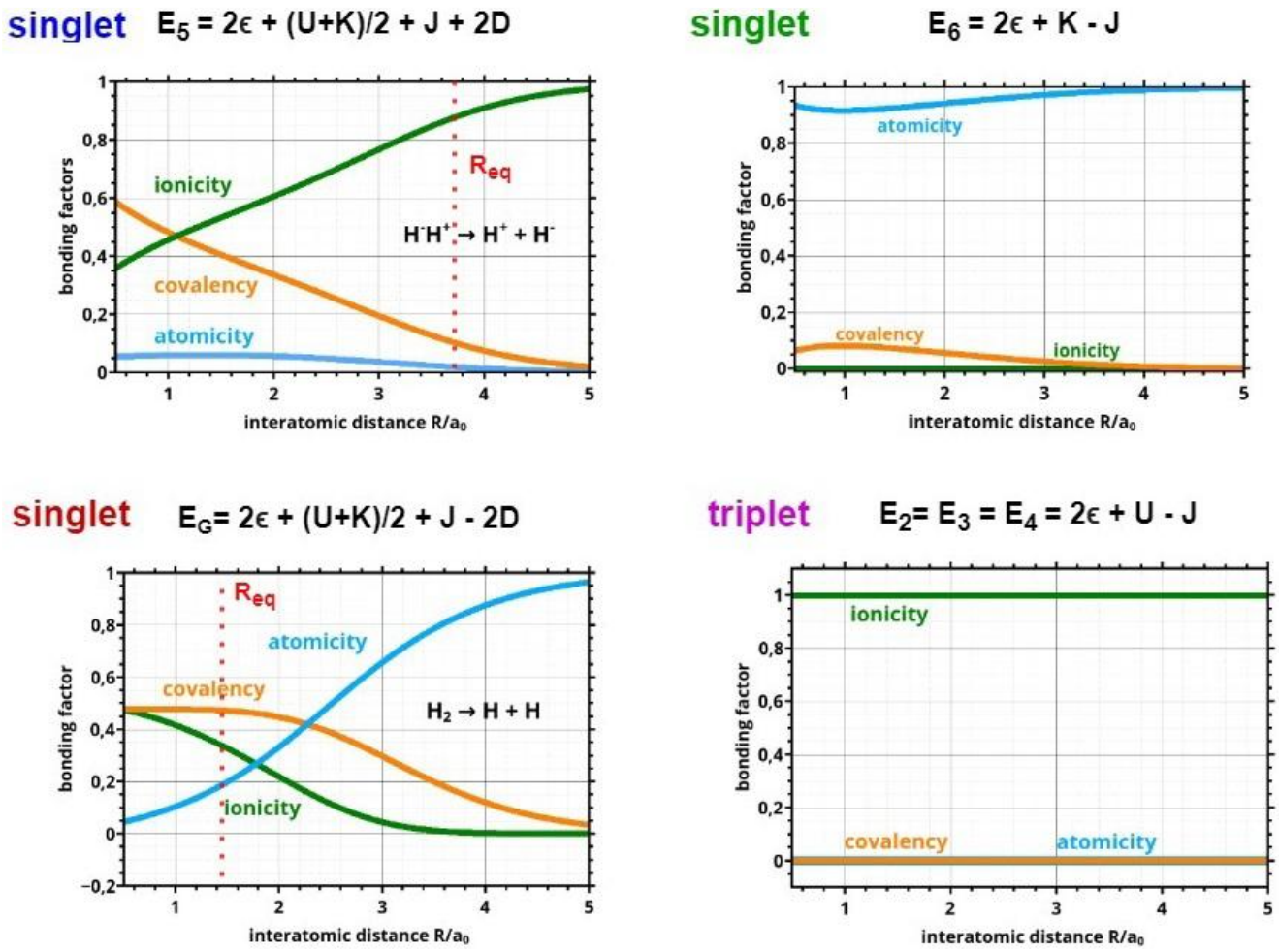


Figure 2: The atomicity, ionicity, and covalency for various ground and spin-excited states of the hydrogen molecule (H_2) as functions of the interatomic distance R.

The energy expressions for these states include contributions from kinetic energy, Coulomb interaction, and exchange terms.

The corresponding mathematically well-defined formalism was given in the oral report of the author as well.

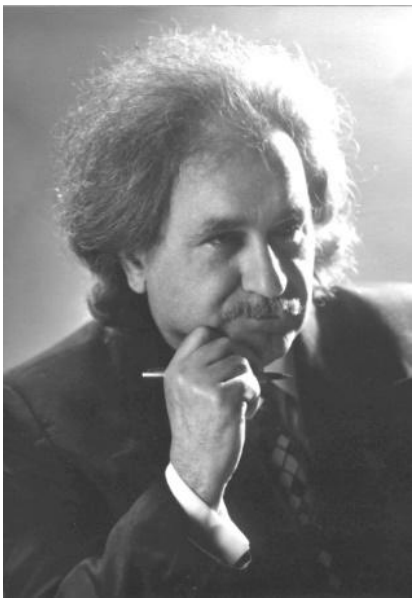
The report was based on the list of references as follows.

[1] M. Pendas and E. Francisco, Nature Communications 13, 3327 (2022),
[2] M. Pendas and E. Francisco, Phys. Chem. Phys. 20, 12368 (2018).
[3] M. Fugel, M. F. Hesse, R. Pal, J. Beckmann, D. Jayatilaka, M. J. Turner, A. Karton, P. Bultinck, G. S. Chandler, and S. Grabowsky, Chem. Eur. J. 57, 15275 (2018).
[4] G. B. Bacskay and S. Nordholm, J. Phys. Chem. A 117, 79467958 (2013),
https://doi.org/10.1021/jp403284g, URL https://doi.org/10.1021/jp403284g.
[5] Z. Chen, C. Zhou, and W. Wu, J. Chem. Theory Comput. 11, 41024108 (2015),
[6] B. G. Levine and M. Head-Gordon, Nature Communications 11, 4891 (2020),
[7] M. Hendzel, M. Fidrysiak, and J. Spalek, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 55, 185101 (2022),
[8] M. Hendzel, M. Fidrysiak, and J. Spalek, The Journal of Physical Chemistry Letters 13, 10261 (2022),
[9] J. Spalek and M. Hendzel, arXiv preprint arXiv:2406.06171 (2024) L
[10] B. Robertson, Am. J. Phys. 41, 678 (1973).
[11] J. Spalek, Mott physics in correlated nanosystems: localization-delocalization transition by the exact diagonalization ab initio method, vol. 10 of In: Topology, entanglement, and strong correlations edited by Pavarini E. and Koch E. (Forschungszentrum J¨ulich GmbH, Institute for Advanced Simulation, 2020), ISBN 978-3-95806-466-9.
[12] K. Ruedenberg, Rev. Mod. Phys. 34, 326 (1962).
[13] V. I. Anisimov, A. R. Oganov, D. M. Korotin, D. Y. Novoselov, A. O. Shorikov, and A. S. Belozerov, The Journal of Chemical Physics 160, 144113 (2024), ISSN 0021-9606.

АВТОРСКИЙ ПОКАЖЧИК

Bandura H.Ya. **221, 301**
Bilokon E. **223**
Bilokon V. **223**
Bilynskyi I.V. **221, 300, 301**
Bogolubov N.N. (Jr) **213**
Bondar D. 216, **223, 224, 225, 266, 268, 279, 292**
Bondar I. **256**
Bukalov O. **73, 178, 265**
Christianto V. **106**
Denisov V.Yu. **215**
Dvoeglazov V.V. **228**
Elskens Y. **209**
Ettah E.B. **256**
Gapyak I. **79**
Gerard McCaul **254**
Gerasimenko V. **79**
Hanulych V. **232**
Hryniv R.O. **291**
Ishaje M.E. **256**
Ishchenko L.O. **282**
Jacobs K. **216, 268**
Jellinek J**. 40, 238**
Khoma M. **242**
Khrystenko E.V. **282**
Kiessling M.K.-H.
Konstantinov V.A. **274**
Korpas G. **268**
Krivchikov A.I. **274**
Kryachko E.S.
Kryachko E.S. 64
Kvyk M.V. **300**
Kycia R.A. **248**
Leshko R.Ya. **300, 301**
Lindberg D.R. **223**
Lompay R.R. **295, 297**
Lukin I.V. **279**
Magnot J.-P. **187**
Marecek J. **268**
Melnyk Ya.Yu. **301**
Minakova K. **256**
Nurmagambetov A. **98, 262**
Obikhod T.V. **147, 263**
Ovsiannikov R.T. **266**
Parida B.K **216**
Popovych Z. **268**
Prykarpatski A.K. **213**
Remeta E.Yu. **64**
Rogacki K. **285**
Sagan V.V. **274**
Sen A. **216, 217**
Simulik V.M. **24, 132, 295, 297**
Sirenko V. **256**
Smarandache F. **106**
Solovjov A.L. **285**
Sotnikov A. **223, 266, 279**
Spałek J. **302**
Steinacker H. **281**
Tahvildar-Zadeh A.S.
Terekhov A.V. **282, 285**
Vasylyshyn T.V. **291**
Yarovyi V.M. **282, 285**
Zagorodnyuk A.V. **291**
Zajac T.M. **295, 297**
Zhdanov D V. **292**
Zolochevskii I.V. **282**
Антал А. **218**
Бандурина Л.О. **271**
Блудова Л. В.
Ворошило О.І. **127**
Гаврилик О.М. **40**
Гайсак І. **234**
Гедеон С.В. **229**
Гомонай Г.М. **9, 11, 271**
Горбатенко Ю.В. **236**
Грушка Я.І. **211**
Гула І. **151, 240**
Дяченко М. **226б 259**

Качурик І. **151, 240**
Козлов І.В. **246**
Колесніченко Ю.О. **246**
Колісник А.С. **244**
Королюк О.О. **236**
Кочемба А.А. **229**
Кривчіков О.І. **236**
Ксаверій Ю. **121**
Лазур В.Ю. **229**
Лендєл О.І. **14, 88, 249**
Макаренко О.В. **127**
Маслюк В.Т. **251**
Назаренко А.І. **40**
Новак О. **226, 259**
Петренко Є. В. **244**
Рогацький К. **244**
Роман В.І. **271**
Романцова О.О. **236**
Соловйов А.Л. **244**
Терехов А.В. **244**
Торич З.З. **142**
Холодов Р. **259**
Яворський П.В. **288**
Яремко Ю. **165**



Науково-інформаційне видання

Укладачі:
А.М. Завілопуло, д ф.-м.н., професор
В.І. Роман, к.ф.-м.н., старший дослідник
Відповідальні за випуск:
Г.М. Гомонай, д.ф.-м.н., член-кореспондент НАН України
Т.Ю. Попик, к.ф.-м.н., науковий співробітник

Матеріали подано в авторській редакції

Оригінал-макет: А.М. Завілопуло
Обкладинка: В.І. Роман
Інститут електронної фізики НАН України
88017 м. Ужгород, вул. Університетська, 21
Тел.: +38 (0312) 64-72-52

Здано до складання 11.12.2024. Підписано до друку 25.12.2024.
Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman.
Друк офс. Ум. Друк. 17,8. Обл.-вид. Арк. 15,56.
З оригінал-макетів замовника. Наклад 200 примірників.

Замовлення No 36.
Видавництво «ФОП Сабов А.М.»
м. Ужгород, вул. Університетська, 21/220
Тел./факс: +38 (0312) 64-37-22
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК No 4815 від 25.02.2015 р.
Друк: ФОП Сабов А.М., тел. 050-43-22-437

